

**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**

**Faculdade de Ciências e Letras  
Campus de Araraquara - SP**

**EDUARDO JOSE MARQUES JUNIOR**

**EXTRAPOLAÇÃO E BOLHAS FINANCEIRAS**



**ARARAQUARA – S.P  
2020**

EDUARDO JOSE MARQUES JUNIOR

## **EXTRAPOLAÇÃO E BOLHAS FINANCEIRAS**

Dissertação de Mestrado, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências e Letras – Unesp/Araraquara, como requisito para obtenção do título de Mestre em Economia.

**Orientador: Prof. Dr. Mario A. Bertella**  
**Coorientador: Dr. Jonathas N. Silva**

**Linha de Pesquisa: Finanças e Economia aplicada**

**Bolsa: Capes**

ARARAQUARA – S.P.

2020

Marques Junior, Eduardo Jose  
Extrapolação e Bolhas Financeiras / Eduardo Jose  
Marques Junior - 2020  
75 f.

Dissertação (Mestrado em Economia) - Universidade  
Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho",  
Faculdade de Ciências e Letras (Campus Araraquara)  
Orientador: Mário Augusto Bertella  
Coorientador: Jonathas Nunes da Silva

1. Modelos ABM. 2. Finanças Comportamentais. 3. Bolhas  
Financeiras. 4. Aversão à perda. I. Título.

EDUARDO JOSE MARQUES JUNIOR

## **EXTRAPOLAÇÃO E BOLHAS FINANCEIRAS**

Dissertação de Mestrado, apresentada ao Conselho, Programa de Pós em Economia da Faculdade de Ciências e Letras – UNESP/Araraquara, como requisito para obtenção do título de Mestre em Economia.

**Orientadores: Prof. Dr. Mário Augusto Bertella**

**Coorientador: Dr. Jonathas Nunes da Silva**

**Linha de pesquisa: Finanças e Economia aplicada**

**Bolsa: CAPES**

Data da defesa: 26/06/2020

### **MEMBROS COMPONENTES DA BANCA EXAMINADORA:**

---

**Presidente e Orientador: Prof. Dr. Mário Augusto Bertella**

Universidade Estadual Paulista (UNESP).

---

**Prof. Dr. André Luis Correia**

Universidade Estadual Paulista (UNESP).

---

**Prof. Dr. Edgardo Brigatti**

Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

Universidade Estadual Paulista (UNESP).

**Local:** Universidade Estadual Paulista

Faculdade de Ciências e Letras

**UNESP – Campus de Araraquara**

Dedico este trabalho à minha mãe, Maria Cecília da Silva, que me apoiou desde o início e me ajudou a superar todas as barreiras e dificuldades.

## AGRADECIMENTOS

Sempre será difícil expressar todo a gratidão pelas pessoas que contribuíram para um trabalho de conclusão, e as experiências com cada uma foi e sempre será de grande valor e jamais esquecerei em minha vida.

Inicio agradecendo ao grupo de professores e em especial ao meu orientador Mário Bertella, pelo voto de confiança e trabalho em sua linha de pesquisa, espero ter correspondido as expectativas. Agradeço também ao meu coorientador Jonathas, que com paciência, me auxiliou na parte final e crucial de meu trabalho. Estendo esse agradecimento também a todos professores do PPGE da UNESP de Araraquara.

Ao meu pai Eduardo, meus irmãos Alaor e José Marcelo, fica aqui meus maiores agradecimentos pelo apoio e ajuda nesses dois anos.

Nestes dois anos também pude aprender muito com meus amigos de turma e apartamento, aos quais sou grato tanto pelo compartilhamento teórico quando pelos bons momentos de convivência. Sou especialmente grato à João, Estevão, Álvaro, Rodrigo, Rafael, Gabriel, Matheus, Jorge, Ana e Amanda.

Agradeço também ao time de Handebol da UNESP Araraquara, pela acolhida e amizade nesse tempo, onde tivemos muitas e vitórias e derrotas, que fazem parte do aprendizado, obrigado por manter à chama acesa de um esporte que tanto amo e me faz muito bem.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## RESUMO

Este trabalho busca mostrar os efeitos de um viés emocional no comportamento do agente investidor no mercado de ações com as abordagens *agent-based* e de bolhas financeiras. Além de mostrar o que são os modelos, quais são suas colaborações e métodos. Com o auxílio do software MatLab e lógica de programação, foi encontrado o preço de equilíbrio, a taxa de retorno e as demandas de ações de cada agente no mercado e obtivemos a análise do volume de negociação dos agentes em diferentes períodos da bolha financeira, concluindo que quando o preço aumenta, os agentes fundamentalistas deixam o mercado, fazendo com que somente extrapoladores ou grafistas negociem e conseqüentemente o volume de negócios diminuem e vice-versa quando os preços tendem a cair. Também foi analisado o efeito do viés aversão à perda nos grafistas e encontrado suas conclusões.

**Palavras-chave:** modelos ABM, Finanças Comportamentais, extrapolação e aversão à perda.

## **ABSTRACT**

This work seeks to show the effects of an emotional bias on the behavior of the investing agent in the stock market with the agent-based and financial bubble approaches. In addition to showing what the models are, what are their collaborations and methods. With the aid of MatLab software and programming logic, the equilibrium price, the rate of return and the demands of shares of each agent in the market were found and we obtained an analysis of the trading volume of agents in different periods of the financial bubble, concluding that when the price increases, fundamentalist agents leave the market, causing only extrapolators or graphic designers to negotiate and consequently the volume of business decreases and vice versa when prices tend to fall. We also analyzed the effect of loss aversion bias on graphic designers and found their conclusions.

**Keywords:** ABM models, Behavior Finance, extrapolation and loss aversion.

## LISTA DE GRÁFICOS

<b>Gráfico 1</b>	Preço e retorno para agentes fundamentalistas	29
<b>Gráfico 2</b>	Dividendo, demanda, e demanda maximizada a zero para agentes fundamentalistas	30
<b>Gráfico 3</b>	Preço de Barberis <i>et. al.</i> (2018)	34
<b>Gráfico 4</b>	Demandas extrapoladoras e fundamentalistas de Barberis <i>et. al.</i> (2018)	35
<b>Gráfico 5</b>	Volume de negociação de Barberis <i>et. al.</i> (2018)	35
<b>Gráfico 6</b>	Preço para agentes grafistas e fundamentalistas	37
<b>Gráfico 7</b>	Demandas extrapoladoras e fundamentalista	37
<b>Gráfico 8</b>	Demandas para o agente tipo 1 grafista e fundamentalista	38
<b>Gráfico 9</b>	Taxa de Retorno do modelo	38
<b>Gráfico 10</b>	Volume de negociação do modelo	39
<b>Gráfico 11</b>	Preço com aversão à perda nos grafistas	44
<b>Gráfico 12</b>	Mudanças de preços reais e esperadas	44
<b>Gráfico 13</b>	Volume de negociação com aversão à perda nos grafistas	45
<b>Gráfico 14</b>	Volumes de negócios do modelo com e sem aversão à perda	47

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b>	Estatística Descritiva para agentes fundamentalistas	31
<b>Tabela 2</b>	Estatística Descritiva para agentes grafistas e fundamentalistas	40
<b>Tabela 3</b>	Volume de negócios para agentes grafistas e fundamentalistas	41
<b>Tabela 4</b>	Estatística Descritiva com aversão à perda nos grafistas	46
<b>Tabela 5</b>	Volume de negócios com aversão à perda nos grafistas	46
<b>Tabela 6</b>	Valores dos Parâmetros do modelo	54

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	10
1. MODELOS BASEADOS EM AGENTES E FINANÇAS COMPORTAMENTAIS	11
1.1 Os modelos baseados em agentes .....	11
1.2 Modelos baseados em agentes aplicados às Finanças Comportamentais.....	15
2. MODELO COMPUTACIONAL DO MERCADO FINANCEIRO ARTIFICIAL ...	23
2.1 Modelo de Bolhas de Barberis <i>et. al.</i> (2018).....	25
2.2 Resultados.....	28
2.2.1 Modelo apenas com fundamentalistas.....	28
2.2.2 Modelo com agentes fundamentalistas e grafistas ou extrapoladores.....	31
2.2.3 Modelo com Aversão à perda no comportamento dos grafistas.....	41
CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	47
REFERÊNCIAS .....	48
APÊNDICE .....	53

## INTRODUÇÃO

No mercado financeiro, muitos investidores formam sua demanda por um ativo de risco levando-se em conta preços passados, valorização do ativo, taxa de retorno, volatilidade dos preços e entre outros. Sendo assim, o mercado prevê que boas (ou más) notícias sobre os ativos podem desencadear grandes alterações de preços. Na literatura, esse é o significado de bolhas de mercado, e que essas, acompanhadas de um alto volume de negociação, tendem a provocar alterações significativas nos retornos de ativos.

Durante quatro episódios de bolhas - o mercado de ações dos EUA em 1929, ações de tecnologia em 1998-2000, e a crise de 2008, assim como com a pandemia do vírus COVID-19 – pode-se verificar que a correlação entre volume de transação e retorno do ativo em questão é maior durante o período da bolha, o que nos motiva a tentar descobrir o comportamento das variáveis presentes no mercado financeiro a fim de saber o resultado durante este período.

Este trabalho tem por objetivo verificar a dinâmica de preço e retorno das ações tendo como pano de fundo o artigo “*Extrapolation and Bubbles*” de Barberis, Greenwood, Jin, Shleifer (2018). Este texto foi escolhido, pois N. Barberis é um dos principais expoentes da literatura de Finanças Comportamentais e este trabalho é o mais recente do autor referente a bolhas financeiras publicado num dos principais periódicos de finanças do mundo. O objetivo da dissertação é replicar o seu artigo usando a metodologia de *agent-based model (ABM)*, incorporando alguma modificação de caráter emocional no comportamento dos grafistas.

A dissertação terá o seguinte formato: o primeiro capítulo discutirá a metodologia dos modelos baseados em agentes, bem como os trabalhos que incorporam as características psicológicas dos investidores. O segundo refere-se à replicação do artigo em si. As conclusões encerram a dissertação.

## Capítulo 1

### 1. MODELOS BASEADOS EM AGENTES E FINANÇAS COMPORTAMENTAIS

#### 1.1 Os modelos baseados em agentes

Segundo Railsback e Grimm (2012), um modelo baseado em agentes – ou *Agent-Based Model* (doravante ABM) – consiste de um conjunto de sistemas formados por “agentes” autônomos que interagem entre si num determinado ambiente. Como se pode entrever nessa definição e, de modo mais exato, como em Starfield *et al.* (1990), os modelos devem ser entendidos como a **representação intencional de um sistema real**. Quando cotejados, esses modelos podem apresentar diferenças ou semelhanças de acordo com a distribuição (heterogênea ou homogênea) de seus agentes no tempo e no espaço a partir dos quais eles desempenharão comportamentos fundamentais para o funcionamento do sistema no qual estão integrados.

Esses modelos são elaborados tendo em vista a resolução de problemas estabelecidos em um sistema ou em uma classe de sistemas, atendo-se especialmente ao modo como os agentes interagem a fim de otimizar o funcionamento do sistema de que fazem parte. Para se construir um modelo, antes é preciso conhecer todo o sistema no qual os agentes se encontram integrados, isto é, quais são os elementos e os processos que o definem (RAILSBACK e GRIMM, 2012). Em tese, essa ideia preliminar poderá ser formulada a partir do conhecimento empírico que se tem a respeito do funcionamento do sistema, levando em conta modelos anteriormente estabelecidos para a abordagem de questões similares. Esse conhecimento empírico é muito importante, pois, a ausência de uma ideia geral sobre o funcionamento de um sistema poderá impedir a elaboração de um modelo (RAILSBACK e GRIMM, 2012).

Na primeira versão de um modelo, as suposições são ainda experimentais. Nesse sentido, Railsback e Grimm (2012) salientam que é preciso testá-las, de modo a verificar se elas são apropriadas, ou seja, se as suposições são ou não operacionais para a construção de um modelo. Para isso, torna-se necessário o estabelecimento de critérios que permitam averiguar se o modelo construído pode ser considerado uma representação adequada do sistema real. Esses critérios devem ser definidos por meio da identificação de padrões ou de regularidades que permitam delimitar e caracterizar o sistema.

Quando aplicados ao mercado de ações, os ABMs devem permitir reproduzir os tipos de volatilidade (variação na quantidade de preço, retorno, volume e entre outros de uma ação num determinado período) e as tendências de preços, retorno e volume de negócios que se estabelecem nos mercados reais. Nesse sentido, a aplicação desses modelos à economia e às finanças corresponderá a uma análise baseada em mercados artificiais que são elaborados por pesquisadores de computação aplicada, principalmente. Essa abordagem lida diretamente com o mecanismo de emergência dos preços por meio do qual as tomadas de decisões dos agentes afetam os preços, sendo, portanto, uma abordagem ideal para os objetivos perseguidos ao longo desta pesquisa.

Ainda segundo Railsback e Grimm (2012), os ABMs se diferem das abordagens tradicionais especialmente porque permitem estabelecer dois níveis de interação, ao menos. De acordo com esses autores, por meio de sua aplicação, torna-se possível analisar o que acontece com o sistema (i) a partir do que seus indivíduos fazem (ii) a partir do que acontece com os indivíduos devido ao que o sistema faz (RAILSBACK e GRIMM, 2012). Os ABMs também se diferenciam dos modelos tradicionais (e. g., KIM e MARKOWITZ, 1989; BROCK e HOMMES, 1989) por permitirem uma abordagem complexa de um fenômeno, já que levam em conta não somente os indivíduos, mas também o modo como as variáveis que os afetam mudam de acordo com o tempo, o espaço etc. (RAILSBACK e GRIMM, 2012).

Para se construir um modelo, torna-se fundamental adotar um conjunto padrão de conceitos (emergência, comportamento adaptativo, interação, etc.). Nesse sentido, como destaca Railsback e Grimm (2012), os ABMs apresentam três vantagens. Como esse aparato conceitual deve permitir descrever os elementos fundamentais dos ABMs, isso acaba por: **(i)** fornecer uma nova “linguagem” para se pensar em modelos e descrevê-los. Além disso, no geral, a produção de *software* útil é mais complexa para os ABMs do que para a maioria dos outros tipos de modelos, o que conduz ao **(ii)** desenvolvimento de novas habilidades de *software* para implementar modelos em computadores a fim de observar, testar, controlar e analisar modelos. Também é importante ressaltar que quase não há limites para a complexidade de um modelo de simulação computacional, o que dificulta parametrizar, validar ou analisar modelos muito elaborados. Logo, é necessário buscar meios para determinar quais entidades, variáveis e processos serão levados em conta, para só então, após construído e analisado o modelo, aprendermos sobre o sistema

real, chegando por fim ao **(iii)** estabelecimento de novas estratégias de projeção e de análise de modelos.

Ainda de acordo com Railsback e Grimm (2012), o procedimento de modelagem deve ser entendido como um percurso que parte da **(i)** formulação de uma pergunta precisa, passa pela **(ii)** montagem das hipóteses, pela **(iii)** definição dos processos e das estruturas-chave e pela **(iv)** formulação do modelo em si, chegando pôr fim à sua **(v)** implementação em um programa de computador que deverá ser testado, revisado e analisado, como dizíamos.

Diante disso, algumas questões se colocam de entrada: como se deve escrever ABMs? Quais características eles devem conter e como as descrever de forma concisa e clara? Quando se usam modelos baseados em equações tradicionais, a resposta é mais simples por conta de dispormos de uma notação usual. Mas, ao se formular ABMs, essas questões são mais difíceis de se responder porque, além de os modelos poderem ser mais complexos, não podemos dispor de uma notação tradicional para a sua descrição, como poderíamos se tomássemos como método as equações diferenciais.

Foi diante dessa dificuldade que um grupo de modeladores experientes desenvolveu o *Overview, Design Concepts and Details* (doravante ODD) (Cf. GRIMM *et al.*, 2006; Cf. RAILSBACK e GRIMM, 2005), que é um protocolo padrão de descrição dos ABMs amplamente utilizado pelos pesquisadores que trabalham com modelos baseados em agentes. Como demonstram os trabalhos citados acima, esse protocolo provou ser operacional não apenas para descrever ABMs, mas também para se pensar nos modelos à medida que são formulados e simulados. O protocolo ODD é projetado para criar descrições completas de modelos factuais, rápidas e fáceis de entender, organizadas para apresentar informações em uma ordem mais funcional. Desde o seu desenvolvimento, o ODD tem sido usado para ajudar a tomar todas as decisões básicas de formulação, tais como: quais os tipos de elementos que deveriam integrar o ABM? Quais comportamentos os seus agentes deveriam ter? Quais seriam os resultados buscados e esperados? (RAILSBACK e GRIMM, 2012).

Nesse aspecto, Railsback e Grimm destacam que, com ABMs:

pode ser difícil manter todas as características do modelo em mente. De fato, muitas descrições de ABMs na literatura são incompletas, o que torna impossível reimplementar os modelos e replicar seus resultados.

A replicação, no entanto, é fundamental para a ciência: modelos que não podem ser reproduzidos são não-científicos (2012, p. 36).

Assim como equações diferenciais fornecem uma maneira de pensar e de descrever problemas de modelagem matemática, a bayesiana fornece maneiras de pensar sobre problemas de modelagem estatística, o ODD fornece os meios para pensar e descrever problemas de modelagem baseados em agentes:

Sem esse protocolo, os ABMs geralmente são descritos de forma incompleta, dificultando a replicação, o que prejudica seu caráter científico. Isso não ocorre aplicando o ODD. Este protocolo consiste em três elementos (*Overview, Design Concepts and Details*) que fornecem uma visão geral do que é o modelo e como ele é projetado, por um elemento de conceitos de design para descrever as características essenciais do ABM e por esses três elementos que fornecem os detalhes necessários para completar a descrição. (RAILSBACK e GRIMM, 2012, p. 45).

Com esse protocolo, são definidas as entidades do modelo e quais variáveis serão usadas para caracterizá-las. Os ABMs geralmente possuem os seguintes tipos de entidades: um ou mais tipos de **agentes**; o **ambiente** em que os agentes vivem e interagem, muitas vezes dividido em unidades **locais** e, por fim, o **ambiente “global”** que afeta todos os agentes. Essas entidades de modelo são caracterizadas por suas **variáveis de estado**, definidas segundo o modo como o modelo especifica seu estado a qualquer momento. O **estado de um agente** é definido por suas **propriedades** ou **atributos** (tamanho, idade, economia etc.) e, muitas vezes, definido também por sua **estratégia comportamental** (comportamento de pesquisa, estratégia de lances, algoritmo de aprendizado etc.) (Cf. RAILSBACK e GRIMM, 2012).

A título de exemplo, um modelo pode considerar um mercado de ações que usa um passo de tempo diário, representando todos os negócios ao longo de cada dia e como os preços médios diários validam o número de negócios. Já um modelo do mesmo mercado, elaborado segundo um passo de tempo mais curto, poderia manter o controle de negócios individuais, por exemplo. Esses conceitos de *design*, que descrevem a forma como o modelo mostra a volatilidade dos preços ao longo do tempo, fornecem uma maneira padronizada de se pensar sobre características importantes de ABMs, como o comportamento dos agentes e os resultados e implicações de suas ações, elementos que não podem ser bem descritos empregando outras estruturas conceituais, como aquela dos

modelos convencionais. No geral, esses últimos produzem só um resultado, calculado diretamente a partir de equações, ao passo que os ABMs podem produzir resultados diversos, de formas complexas e imprevisíveis (RAILSBACK e GRIMM, 2012).

É difícil tratar de um sistema que requeira uma abordagem por ABMs sem estudar primeiro sobre o comportamento dos agentes. Portanto, antes de se voltar para o mercado completo, é importante testar e entender esses comportamentos:

Em economia, os novos campos da economia comportamental e das finanças comportamentais estão repentinamente observando com afimco como as pessoas realmente tomam os tipos de decisões que são frequentemente representadas nos ABMs. A literatura de "heurística simples", por exemplo, postula que as pessoas geralmente tomam decisões complexas em contextos incertos por meio de regras simples que geralmente produzem bons resultados, mas não ótimos. Outro trabalho identificou categorias inteiras de preconceitos que afetam nossa tomada de decisão. Há grandes oportunidades de usar métodos baseados em agentes para vincular essa crescente compreensão do comportamento à dinâmica dos sistemas humanos. (RAILSBACK e GRIMM, 2012, p. 311).

Os ABMs são modelos de sistemas reais: as tomadas de decisões dos agentes devem ser suficientemente realistas para que permitam capturar os efeitos principais do comportamento dos agentes no sistema. Nossa experiência de estudo sobre ABMs tem revelado que os modelos mais eficientes são aqueles capazes de capturar os principais comportamentos dos agentes (Cf. RAILSBACK e GRIMM, 2012). Não à toa os novos campos da economia comportamental e das finanças comportamentais estão constantemente observando como as pessoas tomam os tipos de decisões que frequentemente são representadas nos ABMs.

## **1.2 Modelos baseados em agentes aplicados às Finanças Comportamentais**

A seguir, veremos exemplos de ABMs aplicados ao campo das finanças, especificamente importantes questões como a influência do comportamento dos agentes nas variáveis de um modelo e o modo como a psicologia do agente decisório pode

influenciar essas ações. Esses são questionamentos que impuseram e ainda estão impondo novos desafios aos defensores da Hipótese de Mercados Eficientes (doravante HME)<sup>1</sup>

Nesse cenário em que se busca realizar análises para se chegar a novas explicações, a teoria de finanças comportamentais surgiu como uma tentativa de transpor as dificuldades impostas à HME. De acordo com Barberis e Thaler, muitos testes empíricos evidenciaram a existência de problemas que não são explicados pela Hipótese de Mercados Eficientes, tais como: a previsibilidade de retornos, a alta volatilidade dos preços e o volume excessivo de negociações (BARBERIS e THALER, 2003). Os estudos sobre o comportamento e a irracionalidade do agente se apropriaram desses questionamentos na tentativa de propor algumas soluções. Nesse sentido, conceitos de outras áreas como a Psicologia e a Sociologia foram trazidos para a Economia a fim de explicar as decisões financeiras dos indivíduos e aproximar a Teoria Econômica e de Finanças à realidade dos mercados financeiros. Essa linha de pesquisa busca identificar como as emoções e os “erros cognitivos” podem influenciar as decisões de investidores e como esses padrões de comportamento podem determinar mudanças no mercado.

Como nos indica Pires (2012), Barberis e Thaler (2003) dividiram as finanças comportamentais em dois pilares fundamentais: a psicologia cognitiva (ou psicologia do agente decisório) e os limites à arbitragem. Segundo Pires, ambos

referem-se à enorme evidência psicológica de que **os agentes cometem erros sistemáticos sob condições de incerteza**, isto é, os agentes se desviam dos pressupostos neoclássicos relacionados à maximização de utilidade, preferências estáveis e processamento ótimo de informações (2012, p. 21, grifos nossos).

Para Rabelo e Ikeda (2004), a arbitragem pode ser definida como a compra e venda simultânea de títulos substitutos por preços vantajosamente diferentes, e em dois mercados distintos. Já os limites que são impostos à arbitragem consistem em dificuldades no mecanismo “responsável pela eliminação das distorções de preços dos ativos, decorrentes de negociações de investidores irracionais, reestabelecendo a eficiência dos

---

<sup>1</sup> A HME baseia-se no pressuposto de que os preços dos ativos nos mercados financeiros refletem totalmente todas as informações disponíveis. Fama (1970) afirma que nenhuma informação poderia possibilitar aos investidores ganhos anormais, isto é, retornos superiores ao retorno ajustado ao risco de determinado ativo. A definição formal da hipótese seria a aplicação de expectativas racionais ao preço não apenas das ações, mas também de outros títulos (Cf. MISHKIN, 2011).

mercados” (PIRES, 2012, p. 16). Quando um ativo é mal precificado, as estratégias designadas à correção de seu preço podem implicar em riscos e custos, tornando-as pouco atraentes. Um dos motivos que justifica a presença de risco nas operações de arbitragem, e também sua ineficiência em muitos casos, é a ausência de títulos substitutos perfeitos nos mercados. Segundo Rabelo e Ikeda:

Se o arbitrador for avesso ao risco, seu interesse nesse tipo de arbitragem será limitado. Com uma capacidade finita de aceitação de risco por parte dos arbitradores como um grupo, sua capacidade agregada de trazer os preços alinhados novamente será, também, finita (2004, p. 103).

Barberis e Thaler (2003) mencionam dois tipos de investidores: racionais (“arbitradores”) e irracionais (“*noise traders*”). Tratemos dos primeiros, especificamente do que os diferencia dos *noise traders*. Os arbitradores podem ter horizontes de tempo mais curtos do que teriam os *noise traders* e, à medida que os erros de precificação dos ativos se sustentam ao longo do tempo, os arbitradores podem não conseguir suportar as perdas decorrentes desses erros até que eles sejam revertidos, sendo obrigados a liquidar suas posições e incorrer em prejuízos. Os arbitradores podem preferir negociar na mesma direção dos *noise traders*, como quando esperam que o preço de um ativo continue a aumentar em função da atração de mais investidores. Nessas condições, eles comprarão o ativo na expectativa de obtenção de lucros e isso elevará ainda mais o preço do ativo ao invés de corrigi-lo. Tratando-se então do comportamento do agente, em uma economia real na qual agentes racionais e irracionais interagem, o comportamento irracional pode se sobrepor ao racional, impactando os preços dos ativos substancialmente. Barberis e Thaler (2003) ainda argumentaram que os desvios de preços dos ativos com relação ao seu valor fundamental, que são induzidos por investidores irracionais, não culminarão necessariamente em oportunidades de obtenção de lucros livres de risco, passíveis de serem exploradas por operações de arbitragem.

Yoshinaga *et al.* (2008) indicam que, no que se refere à sua validade empírica, as dificuldades da teoria tradicional indicam duas estratégias possíveis: **(i)** a reformulação da teoria sem abandonar o pressuposto da racionalidade dos agentes e **(ii)** a mudança de paradigma, especialmente a partir do reconhecimento de que as pessoas nem sempre se comportam racionalmente. Esse último, em especial, orienta todo o campo das Finanças Comportamentais.

Barberis e Thaler (2003) afirmam que as Finanças Comportamentais se apresentam como uma nova abordagem para os mercados financeiros. Essa abordagem defende que muitos fatos importantes, discutidos a partir de sua presença nos mercados financeiros, poderiam ser explicados mais adequadamente por meio de modelos que postulem a existência de agentes não completamente racionais. Isso permite analisar o que ocorre em um modelo quando o pressuposto da racionalidade individual proposto pela HME não é levado em conta na sua elaboração. Thaler (1991) afirmou também que, se a maioria dos indivíduos tende a errar na mesma direção, uma teoria que assuma a racionalidade desses sujeitos como pressuposto também comete erros ao tentar prever seus comportamentos.

Segundo Barberis e Thaler (2003), de acordo com a abordagem convencional, o pressuposto da racionalidade dos agentes implica que: **(i)** quando os agentes recebem uma nova informação, eles utilizam suas crenças corretamente, de acordo com a Lei de Bayes<sup>2</sup>; **(ii)** considerando suas crenças, os agentes fazem escolhas que são normativamente aceitáveis, porque estão de acordo com a Utilidade Esperada Subjetiva, propostos por Savage. Nesse sentido, as Finanças Comportamentais têm por objetivo o desenvolvimento de modelos em que os agentes podem falhar ao formar suas crenças corretamente, ou também podem fazer escolhas que são normativamente questionáveis, isto é, incompatíveis com a noção de Utilidade Esperada Subjetiva.

Seguem agora algumas observações a respeito de trabalhos que utilizaram ABMs com base nas Finanças Comportamentais<sup>3</sup>.

Takahashi e Terano (2003) usaram os ABMs para analisar o modo como os preços dos ativos são afetados por investidores racionais e/ou irracionais, tomando por base a teoria financeira tradicional de um lado, e uma abordagem inspirada nas Finanças Comportamentais, de outro. Como outros autores, construíram um mercado financeiro virtual contendo dois tipos de investidores: os fundamentalistas, que fazem previsões baseadas em valores fundamentais, sabem que o preço de uma ação se move de acordo

---

<sup>2</sup> O teorema de Bayes é um corolário da lei de probabilidade total, expresso matematicamente na forma da seguinte equação:  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  em que A e B são eventos aleatórios e  $P(B) \neq 0$ .

<sup>3</sup> O critério de escolha dos trabalhos selecionados levou em conta o número de citações dos trabalhos em alguns dos principais portais de periódicos de que dispomos.

com o movimento browniano<sup>4</sup>, e os não fundamentalistas, chamados pelos autores de “*traders predictors*”, ou grafistas, investidores que fazem previsões com base em tendência. Takahashi e Terano (2003), além de tentar obter o preço do ativo com base na decisão dos investidores, tentaram também saber se, dada uma cesta inicial de agentes, qual tipo sobreviveria no mercado após a interação por meio do princípio da seleção natural, de tal forma que quem obtivesse o maior retorno das ações ficaria no mercado. Quando o número de investidores é o mesmo, os fundamentalistas sobrevivem, quando existem mais grafistas, esses prevalecem e vice-versa para o caso onde existem mais fundamentalistas na cesta inicial do mercado. O preço negociado se desvia em grande medida do valor fundamental, em especial nos casos em que os grafistas estimam as perdas excessivamente, como apontado na Teoria do Prospecto<sup>5</sup>. Esses resultados indicam a possibilidade de os não fundamentalistas, que têm poder de precificação em mercados reais, desviarem os preços negociados do valor fundamental e obterem retornos excedentes. Portanto, a principal contribuição do trabalho de Takashi e Terano (2003) é a de mostrar, fazendo uso de ABMs, que a teoria financeira tradicional pode não ser totalmente efetiva quando suas premissas são estendidas àquelas mais próximas dos mercados reais (TAKAHASHI; TERANO, 2003).

Lovrić (2011), por sua vez, define a atitude de risco como sendo a **preferência temporal**, assumindo um ponto de vista comportamental a partir do qual indica que modelar a preferência de tempo com uma taxa de desconto constante pode não ser um método adequado para fins descritivos. Para esse intuito, ele afirma que uma descrição atenta à **interação entre mecanismos cognitivos e mecanismos efetivos** pode dar ainda mais refinamento à modelagem da preferência temporal (LOVRIĆ, 2011). Assim, o comportamento do investidor é direcionado para um objetivo a partir do qual se toma decisões a fim de atingir diversas metas financeiras e não financeiras.

Para esse autor, as finanças comportamentais têm como objetivo descrever o modo como os investidores individuais se comportam nos mercados, de modo que a simulação

---

<sup>4</sup> O termo “movimento Browniano” pode se referir ao modelo matemático usado para descrever movimentos aleatórios, sendo muitas vezes é chamado de teoria da partícula (Cf. SALINAS, 2005).

<sup>5</sup> A Teoria da Perspectiva (ou Teoria do Prospecto) é uma teoria da Psicologia Cognitiva que descreve o modo como as pessoas escolhem entre alternativas que envolvem risco, para o que as probabilidades de resultados são incertas. A teoria afirma que, de modo geral, as pessoas tomam decisões baseadas em valores de perda potenciais e nos ganhos do que no resultado final (Cf. KAHNEMAN; TVERSKY, 1992; 1986; 1979; 1974).

baseada em agentes preencha a lacuna entre o nível micro do comportamento individual e o nível macro dos fenômenos de mercado (LOVRIĆ, 2011). Em uma estrutura mais padronizada, as preferências (incluindo a atitude de risco) são capturadas pela função de utilidade de um agente, tendo por objetivo a maximização da utilidade esperada. O processamento de informações para a tomada de decisão pode ser duplo, isto é, dar-se por meio de um raciocínio controlado (= expectativas) ou a partir de um sistema efetivo (= resposta emocional a mudanças de preço).

Um dos principais comportamentos abordados por Lovrić (2011) são aqueles marcados pelo excesso de confiança dos investidores. Glaser e Weber (2007) afirmaram que um aspecto problemático dos estudos financeiros é exatamente o fato de a “superconfiança” não ter sido medida (ao invés disso, usa-se uma variável *proxy*), por isso é difícil estabelecer uma ligação direta entre “superconfiança” e negociação. Um exemplo de excesso de confiança é a *miscalibration*, que consiste em superestimar a precisão da própria informação, como ao estabelecer intervalos de confiança muito estreitos na avaliação do valor de um ativo financeiro. Takahashi e Terrano (2003) usam a superconfiança como *miscalibration*, mais especificamente como a subestimação da variância dos retornos das ações. Já Lovrić (2011) apresenta um estudo detalhado sobre esse mesmo viés, juntamente com algumas ramificações do modelo de Levy *et al.* (2000), também conhecido como modelo LLS. Assim como no modelo de Levy *et al.* (2000), Lovrić (2011) trabalha com dois tipos de investidores: *Rational Informed Investors* (doravante RII) e *Efficient Market Believers* (doravante EMB), capturando as preferências do modelo pela função de utilidade de um agente. Existem duas alternativas de investimento: ativo com risco (*risky asset*) e sem risco. O ativo de risco paga um dividendo no início de cada período, que segue um passeio aleatório multiplicativo<sup>6</sup> e o título paga juros de acordo com certa taxa constante. Os RII são informados sobre as propriedades do processo de dividendos. Dito de modo mais preciso, eles não sabem exatamente sobre as realizações futuras de dividendos, mas, uma vez conhecendo a distribuição a partir da qual os dividendos são gerados, eles podem estimar o valor fundamental como um fluxo descontado de dividendos futuros, de acordo com o modelo de crescimento de Gordon<sup>7</sup> e em cada período. Assim, o RII escolhe a proporção de

---

<sup>6</sup>  $D_{t+1} = D_t (1 + z)$  onde  $z$  é uma variável aleatória distribuída uniformemente no intervalo  $[z_1, z_2]$ .

<sup>7</sup> O Modelo de Gordon ou modelo de crescimento de Gordon ou método de Gordon e Shapiro é um modelo de atualização do preço de ações, elaborado em 1956, e leva o nome de seus autores, Myron J. Gordon e

riqueza para investir em ações e títulos a fim de maximizar a utilidade esperada no próximo período. Como todos os RIIs têm o mesmo grau de aversão ao risco, todos terão a mesma proporção ótima.

Os EMBs, por sua vez, acreditam que o preço reflete precisamente o valor fundamental, no entanto, uma vez que não conhecem o processo de dividendos, utilizam a distribuição *ex post* dos retornos de ações para estimar a distribuição *ex ante*. Lovrić (2011) afirma que os investidores desse tipo são imparciais. Na ausência de informação adicional, atribui-se a mesma probabilidade a cada uma das últimas observações de retorno e quando um dividendo muito alto é obtido, os EMBs mudam para o ativo de risco, o que cria um aumento no preço de mercado. No modelo LLS, a desvalorização nunca ocorre, ou seja, o preço de mercado nunca fica abaixo do preço fundamental, a fim de evitar problemas mais técnicos como preços negativos (LEVY *et al.*, 2000). Quando o mercado consiste apenas de RII (ou quando os EMB investem apenas no ativo sem risco), o preço de mercado segue de perto o preço fundamental no próximo período.

Ainda em relação aos EMBs, Lovrić (2011) faz uma comparação entre os EMBs “normais” e os EMBs “superconfiantes”. Os EMBs “normais” assumem que o retorno vem de uma distribuição normal e estável, e em cada período, estimam sua média e seu desvio-padrão usando como base a probabilidade dos retornos. Eles atribuem suas expectativas de retornos das ações a cada uma das últimas observações de retornos, para o que fazem cálculos dos valores da função de densidade de probabilidade (doravante PDF) da distribuição normal estimada em cada retorno, normalizando esses valores para que eles adicionam até chegar em certo limite e assim obter a função de probabilidade para cada investidor. Os EMBs “superconfiantes” também estimam a distribuição normal da amostra, mas subestimam o desvio padrão da distribuição, fazendo com que ele aumente em torno da média, para o que se usa um coeficiente de superconfiança (doravante OC)<sup>8</sup>. Esse coeficiente, juntamente com o grau de “superconfiança”, são grandezas inversamente proporcionais, isto é, os retornos observados que estão mais próximos (ou distantes) da média recebem uma probabilidade mais alta (ou baixa).

---

Eli Shapiro. O modelo, também chamado de “crescimento perpétuo”, não leva em conta os ganhos de capital. De fato, ele considera que, uma vez que o fluxo de dividendos é perpétuo (isto é, tende ao infinito), o ganho de capital não incide sobre a avaliação da ação (Cf. MISHKIN, 2011).

<sup>8</sup>  $\delta = oc * \hat{\delta}$  onde  $oc$  é o coeficiente de superconfiança,  $0 < oc < 1$ .

O “otimismo” e o “pessimismo” são outros tipos de comportamento abordados por Lovrić (2011). Quanto mais otimistas são os EMBs, mais volátil será o preço de mercado. No entanto, a negociação é reduzida porque os *booms* são mais duradouros, ou seja, os ciclos de “surto” e “quedas” aparecem com menos frequência, de modo que o otimismo leva a uma grande “bolha”. O mercado, por sua vez, não falha porque o retorno máximo continua a partir dos retornos anteriores, estando sempre acima do retorno sem risco, portanto, os EMBs investem com frequência no ativo de risco ao passo que o pessimismo empurra o preço do mercado para o preço fundamental. Além desses dois comportamentos, ele trata de um novo investidor: os EMBs de sentimento, que usam o operador de agregação generalizado<sup>9</sup> para estimar seus retornos futuros tomando o tamanho da amostra como base ( $m^t$ ). Assim como ocorre no modelo LLS, os EMBs de sentimento buscam a maximização da utilidade esperada. Em cada período, investem todo o seu patrimônio, seja na ação ou título, e dependendo da comparação entre o retorno esperado das ações e/ou dos títulos.

Outros exemplos que usaram o viés comportamental e a abordagem de finanças comportamentais como base de estudo, foram os trabalhos de Bertella *et al.* (2014) e Bertella *et al.* (2017). Seguindo o mesmo raciocínio, só que agora abordando os níveis de memória e confiança dos agentes, eles construíram um mercado artificial composto por fundamentalistas e grafistas para modelar o processo de tomada de decisão de vários agentes. Estes, como vimos anteriormente, diferem em suas estratégias para avaliar os preços das ações, mas o seu trabalho nos mostra que quando se aumenta a heterogeneidade das estratégias usadas pelos agentes observaram excesso de volatilidade e curtose, de acordo com as flutuações reais do mercado. Quando incorporaram a confiança nos agentes, observaram correlação positiva entre a confiança média e a taxa de retorno, indicando que o sentimento do mercado é um fator importante nas flutuações de preços. Assim, ao refletirem o efeito da “irracionalidade” no comportamento do mercado, os valores dos ativos de risco mudam em relação ao seu valor fundamental (BERTELLA *et al.*, 2014).

Seguindo a mesma ideia de agentes com ou sem confiança, Bertella *et al.* (2017) também analisaram a dinâmica de preços com agentes fundamentalistas e grafistas.

---

<sup>9</sup>  $t + 1 = (\sum_{j=1}^{m^t} (Rt - j)^s)^{1/s}$  quanto maior for o parâmetro  $s$ , maior a expectativa de retorno.

Concluíram que os agentes grafistas confiantes geram volatilidades de preço e taxa de retorno mais altas do que aqueles que não o são. Também descobriram que a curtose e a assimetria são menores no estudo de simulação de agentes que não estão confiantes. Mostraram que o preço das ações e o índice de confiança - ambos gerados no modelo - são cointegrados e que o preço das ações causa o índice de confiança, mas o índice de confiança não afeta o preço das ações (BERTELLA *et al.*, 2017).

## Capítulo 2

### 2. MODELO COMPUTACIONAL DO MERCADO FINANCEIRO ARTIFICIAL

Este trabalho baseia-se no artigo de Nicholas Barberis *et. al.* (2018) “*Extrapolation and bubbles*”, onde é apresentado um modelo de bolhas de mercado em que a abordagem principal é sobre o comportamento do extrapolador, em que o preço esperado é uma média ponderada de preços passados. O objetivo do *paper* é apresentar o modelo usando a literatura de bolhas de mercado dando suporte empírico para os resultados obtidos. Foi escolhido esse artigo como referência principal, pois trata-se de trabalho recente de um dos principais autores da escola de Finanças Comportamentais e publicado em uma revista internacional de grande prestígio, a *Journal of Financial Economics*.

Na literatura de bolhas do mercado financeiro, o preço de um ativo aumenta drasticamente ao longo de alguns meses ou anos, atingindo níveis que excedem de longe avaliações dos fluxos de caixa futuros trazidos ao valor presente (seu valor fundamental ou intrínseco). Estes aumentos de preços são acompanhados por especulação generalizada e alto volume de negócios. A bolha eventualmente termina com um *crash*, no qual os preços caem mais rapidamente do que subiram.

Ainda na literatura de bolhas encontramos o conceito de extrapolação, que é a expectativa ou extrapolação de retornos futuros tendo como base retornos passados. Nela, os extrapoladores compram ativos cujos preços sobem porque esperam que continuem subindo. Extrapolação também aparece em dados sobre as expectativas dos participantes em bolhas experimentais, onde os indivíduos podem ser explicitamente questionados

sobre suas expectativas de retorno (BARBERIS *et. al.*, 2018). Tanto o estudo clássico de Smith, Suchanek e Williams (1988) quanto experimentos mais recentes, como Haruvy, Lahav e Noussair (2007), fornecem evidências diretas de expectativas extrapolativas durante uma bolha de preços experimental bem definida.

Barberis *et. al.* (2018) tentaram elaborar um novo modelo de extrapolação, abordando sobre duas características-chave comuns das bolhas. O primeiro é o que Kindleberger (1978) chamou de deslocamento (*displacement*) - o fato de que quase todas as bolhas do mercado (de tulipas na Holanda até a de internet no final dos anos de 1990) ocorreram devido a boas notícias relacionadas aos fundamentos do mercado. Eles tentaram entender quais padrões de notícias provavelmente geraram as maiores bolhas e se uma bolha pode sobreviver quando as boas notícias chegarem ao fim. Em segundo lugar, tentaram explicar o fato crucial de que as bolhas apresentam volume de negociação muito alto (GALBRAITH, 1954; CARLOS *et al.*, 2006; HONG e STEIN, 2007). À primeira vista, não está claro como a extrapolação pode explicar isso: se, durante uma bolha, todas os extrapoladores tiverem visões similarmente otimistas, eles não trocarão os ativos entre si (BARBERIS *et. al.*, 2018).

Para abordar essas questões, Barberis *et. al.* (2018) apresentaram um modelo no espírito de trabalhos anteriores (CUTLER, POTERBA e SUMMERS (1990), DE LONG *et al.* (1990), HONG e STEIN (1999), BARBERIS e SHLEIFER (2003), e BARBERIS *et al.* (2015)), mas com alguns novos elementos significativos. Existe um ativo livre de risco e outro com risco que paga um fluxo de caixa em um momento fixo no futuro. A cada período, as notícias sobre o valor do fluxo de caixa final são divulgadas publicamente. Existem dois tipos de investidores. O primeiro tipo são os *traders* fundamentalistas e o segundo tipo são os extrapoladores ou grafistas, que formam sua demanda de ações com base em um “sinal de crescimento” extrapolativo, que é uma média ponderada de mudanças de preços passadas. Numa modificação dos modelos anteriores, os extrapoladores também atribuem algum peso a um “sinal de valor” que mede a diferença entre o preço e uma avaliação racional do fluxo de caixa final. Os dois sinais podem ser interpretados como “ganância” e “medo”, que dão ao extrapolador mensagens conflitantes. Se os preços estão subindo fortemente e o ativo está supervalorizado, o sinal de crescimento do preço o encoraja a comprar (“ganância”) enquanto o sinal de valor o encoraja a vender (“medo”) (BARBERIS *et. al.*, 2018), pois o preço de mercado estaria muito acima do preço fundamental.

O segundo ponto levantado por Barberis et. al. (2018) para diferenciar dos modelos anteriores é assumir que, a cada data e independentemente de outros extrapoladores, cada um desloca, de maneira aleatória, o peso relativo que ele coloca nos dois sinais. Essa suposição, a qual é referida como “*wavering*” (“oscilação”), reflete a ambivalência dos extrapoladores sobre como equilibrar os sinais conflitantes que enfrentam. Tal “oscilação” tem uma base na alocação parcialmente aleatória de atenção a vários atributos de escolha, que no caso, são sinais de crescimento e valor. Importante notar que o grau de “oscilação” é constante ao longo do tempo (BARBERIS *et. al.*, 2018).

## 2.1 Modelo de Bolhas de Barberis *et. al.* (2018)

Como nos trabalhos anteriores, o modelo de Barberis *et. al.* (2018) também utiliza o conceito de utilidade esperada do ativo para analisar o mercado artificial. Em resumo, calcula-se a demanda de um investidor por ações que, a cada momento, maximiza uma função de utilidade de aversão ao risco absoluta e constante (CARA) definida sobre a riqueza do próximo período, e o agente racional usa da indução para determinar a demanda da ação no tempo, mas, em cada estágio do processo de indução retrógrada, ele supõe que, em períodos futuros, os outros investidores na economia simplesmente manterão sua participação per capita na oferta de ativos com risco. Em outras palavras, o agente não tem uma compreensão detalhada de como outros investidores na economia formam suas demandas de ações (BARBERIS *et. al.*, 2018).

O modelo é composto por dois ativos, um ativo livre de risco e outro com risco (que ganha um retorno constante normalizado em zero). O valor de  $D_0$ , que é o dividendo do ativo com risco no instante de tempo zero, é informação pública no tempo inicial, enquanto o valor de cada variável aleatória é calculado para cada período de tempo e se torna informação pública no tempo  $t$ . O preço do ativo de risco,  $P_t$ , é determinado endogenamente. Existem dois tipos de *traders* na economia: *traders* fundamentalistas e os extrapoladores (grafistas) e  $Q$  é a quantidade de ações no mercado. A demanda de ações per capita dos *traders* fundamentalistas,  $N_t^F$  para cada período  $t$  do tempo total  $T$ , é dada por

$$N_t^F = \max\left(\frac{D_t - \gamma\sigma_\varepsilon^2(T-t-1)Q - P_t}{\gamma\sigma_\varepsilon^2}, 0\right) \quad (1)$$

Em (1), a constante  $\gamma$  é o coeficiente de aversão absoluta ao risco e  $\sigma_\varepsilon^2$  é a variância da variável aleatória  $\varepsilon_t$ . A variável  $D_t$ , mede o valor do dividendo pago ao final do período total da simulação  $T$ , que é dada por

$$D_t = D_0 + \sum_{j=1}^t \varepsilon_j \quad (2)$$

Onde  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  é uma variável aleatória com distribuição normal e identicamente distribuída ao longo do tempo. A expressão de  $N_t^F$  é derivada da maximização da utilidade e é a demanda de um investidor que não tem compreensão detalhada de como os outros investidores na economia formam suas demandas de ações. Para esse investidor, o numerador da equação (1) é preço esperado do ativo de risco no próximo período. E a demanda fundamental do *trader* é essa mudança de preço esperada, escalonada pela aversão ao risco e por sua estimativa do risco que ele está enfrentando.

Olhando o caso dos extrapoladores, indexados por  $i \in I$ , para  $i = \{1, \dots, I\}$ , mas cada um diferente do outro, a demanda per capita extrapoladora compartilhada no tempo  $t$  é

$$N_t^E = \frac{(1-\theta)\sum_{k=1}^{t-1}\theta^{k-1}(P_{t-k} - P_{t-k-1}) + \theta^{t-1}X_1}{\gamma\sigma_\varepsilon^2} \quad (3)$$

Onde  $X_t$  é a especificação da demanda extrapoladora, que é o numerador da equação (3),  $X_1$  mede o entusiasmo do extrapolador no tempo 1 (constante neutra e estável),  $\theta$  determina a magnitude do sinal de crescimento de  $X_t$ , cujo valor é aproximado e extraído de Barberis et. al. (2015) ( $0 < \theta < 1$ ;  $\theta \cong 0.9$ ).

No entanto, Barberis et. al. (2018) modificam a função de demanda dos grafistas de duas formas: a primeira foi colocá-la como uma média ponderada (peso  $w_{i,t}$ ) de dois componentes (parcela de demanda dos fundamentalistas e parcela dos grafistas), e a motivação foi que, mesmo que os extrapoladores se preocupem com a forma como o

preço do ativo com risco se compara ao seu valor fundamental, um preço menor que o valor fundamental pode exercer uma pressão negativa sobre sua demanda por parte dos fundamentalistas. E a segunda é permitir que o peso de cada extrapolador varie levemente ao longo do tempo e de forma dependente para cada agente de modo que a nova demanda deste tipo de investidor é dada por

$$N_t^{E,i} = \max \left( w_{i,t} \left( \frac{D_t - \gamma \sigma_\varepsilon^2 (T - t - 1) Q - P_t}{\gamma \sigma_\varepsilon^2} \right) + (1 - w_{i,t}) \left( \frac{X_t}{\gamma \sigma_\varepsilon^2} \right), 0 \right) \quad (4)$$

Em que  $w_{i,t}$  é a soma da constante  $w_i$ , peso nos componentes ( $w_i = 0,1$ ), e  $u_{i,t} \sim N(0, \sigma_u^2)$  uma variável aleatória normal identicamente distribuída ao longo do tempo. Para que o valor de  $w_{i,t}$  permaneça no intervalo  $(0,1]$ , os autores truncaram a distribuição de  $u_{i,t}$ . Assim:

:

$$w_{i,t} = w_i + u_{i,t} \quad (5)$$

Assim, eles mostram que o preço de equilíbrio da ação na economia é dado por

$$P_t = D_t + \frac{\sum_{i \in I^*} \mu_i (1 - w_{i,t})}{\sum_{i \in I^*} \mu_i w_{i,t}} X_t - \gamma \sigma_\varepsilon^2 Q \frac{(\sum_{i \in I^*} \mu_i w_{i,t})(T - t - 1) + 1}{\sum_{i \in I^*} \mu_i w_{i,t}} \quad (6)$$

Os parâmetros são definidos como  $D_0$  (dividendo inicial),  $Q$  (oferta per capita do ativo),  $\sigma_\varepsilon$  (desvio padrão dos choques de fluxo de caixa) e  $T$  (número de períodos de tempo). Os parâmetros de níveis de investidores são  $I$  (tipos de extrapoladores),  $\mu_i$  (fração de grafistas na economia para  $i = \{1, \dots, I = 50\}$ ),  $\gamma$  (coeficiente de aversão ao risco absoluta dos agentes fundamentalistas),  $\theta$  (fator de magnitude do sinal de crescimento de  $X_t$ ). Os autores definiram,  $\mu_0$ , a fração de *traders* fundamentalistas na economia, em 0,3, de modo que a participação de extrapoladores seja de 0,7. Há  $I = 50$  tipos de extrapoladores, onde cada tipo tem o mesmo peso populacional de modo que  $\mu_i = \frac{(1-\mu_0)}{I}$ . O parâmetro  $\sigma_u$  que controla o grau de “*wavering*” é ajustado para 0,03. Esse é o grau de

oscilação colocado em cima da ponderação ( $w_{i,t}$  e  $w_i$ ) feita nas demandas de ações dos agentes. Barberis *et. al.* (2018) definiram  $D_0$  para 100,  $\sigma_\varepsilon$  para 3,  $Q$  para 1 e  $T$  para 50. Como o intervalo entre as datas é um trimestre, esse valor de  $T$  significa que a vida útil do ativo de risco é de 12,5 anos.

O retorno das ações é dado por:

$$R(t) = \frac{P(t) + D(t)}{P(t-1)} - 1 \quad (7)$$

## 2.2 Resultados

### 2.2.1 Modelo apenas com fundamentalistas

Elaboramos um primeiro modelo baseado no modelo acima, mas somente com agentes fundamentalistas, ou seja, o conjunto de tipos de *traders* se reduzirá a um elemento:  $i = 0$  (uma vez que os extrapoladores são contados a partir de  $i=1$ ), portanto, não teremos a demanda por ações dos extrapoladores e assim, o peso colocado na demanda de ações ( $w_{0,t}$ ) terá valor unitário fazendo com que a equação (6) se reduza a:

$$P_t^F = D_t - \gamma\sigma_\varepsilon^2 Q \frac{\mu_0 w_{0,t}(T-t-1) + 1}{\mu_0 w_{0,t}} \quad (8)$$

A demanda de ações do mercado que é a demanda de ações de todos os investidores fica reduzida somente aos fundamentalistas. Assim, a equação (4) fica:

$$N_t^F = w_{0,t} \left[ \frac{D_t - \gamma\sigma_\varepsilon^2(T-t-1)Q - P_t}{\gamma\sigma_\varepsilon^2} \right] \quad (9)$$

Onde  $P_{t-1}$  valor do preço no tempo anterior, como  $t$  começa no valor de 1,  $P_0$  é o preço no tempo igual a zero e dado implicitamente pelos autores como igual a 60. Todos os parâmetros e constantes permanecem os mesmos do modelo anterior.

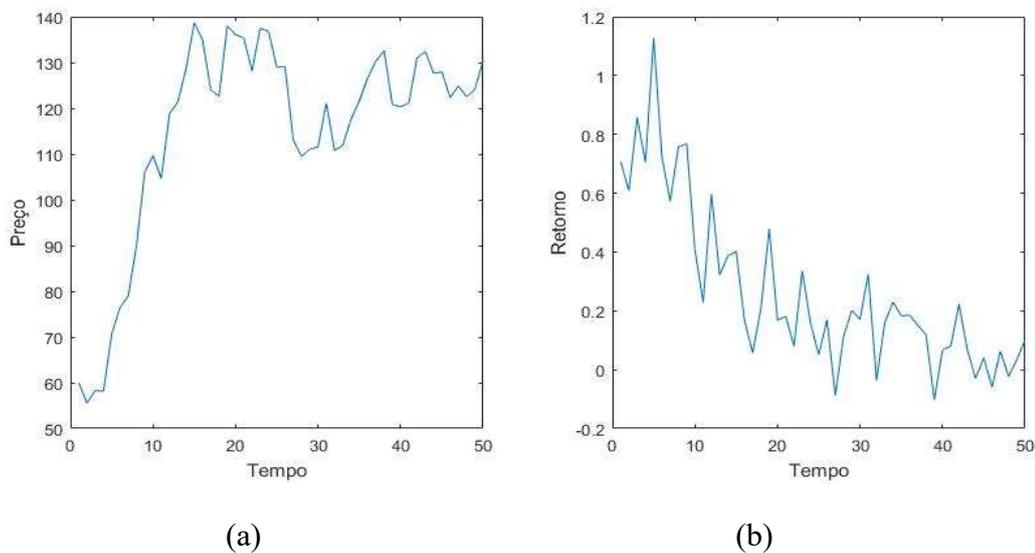
O retorno das ações é dado por:

$$R(t) = \frac{P(t) + D(t)}{P(t-1)} - 1 \quad (10)$$

O volume de negociação é dado por:

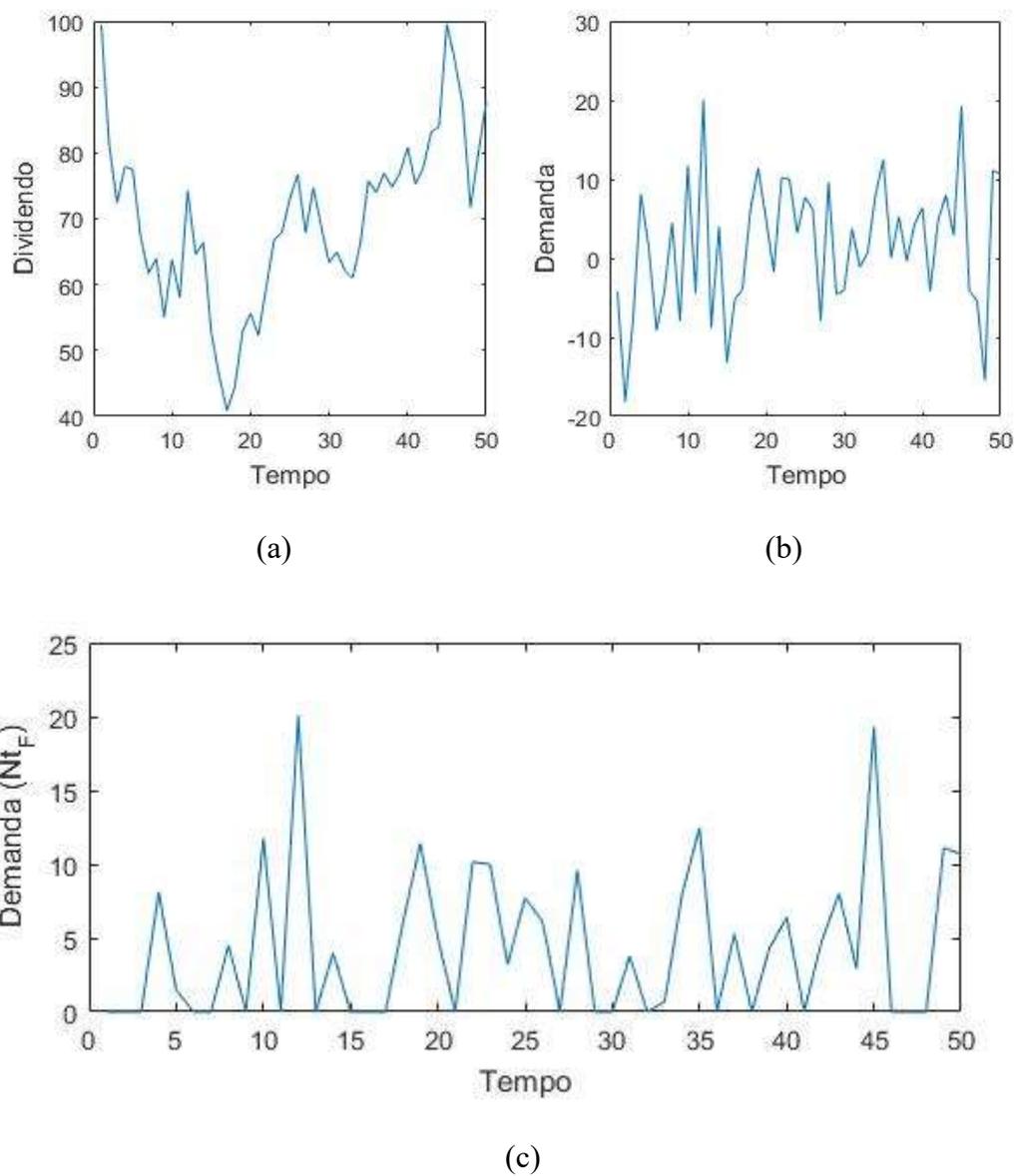
$$Volume(t) = 0.5(\mu_0 |N_t^F - N_{t-1}^F|) \quad (11)$$

Para  $T = 50$ , os resultados foram:



**Figura 1: Comportamento do preço (a) e retorno (b) em relação ao tempo ( $T=50$ ) para agentes fundamentalistas.**

**Fonte: Elaboração própria.**



**Figura 2: Comportamento do dividendo (a), da demanda (b) e da demanda maximizada a zero<sup>10</sup> (c) (função de máximo aplicada a demanda do modelo e o numeral zero) em relação ao tempo ( $T=50$ ) para agentes fundamentalistas.**

**Fonte: Elaboração própria.**

<sup>10</sup> O conjunto de valores máximos entre a demanda e zero.

Elaboramos uma análise de estatística descritiva em cima das variáveis retorno e preço com T=50:

	Média	Desvio Padrão	Moda	Mediana	Curtose	Assimetria
Retorno	39%	0,3211	-23%	27%	3,023	0,167
Preço	116,239	35,2654	48,7556	111,8841	3,36	6,29

**Tabela 1: Estatística descritiva para agentes fundamentalistas**

**Fonte: Elaboração própria**

O excesso de curtose e o valor da assimetria dos retornos sugerem que as trajetórias dos mesmos não têm o comportamento de uma distribuição de variável aleatória normal. O desvio padrão baixo e a média baixa dos retornos indicam que os valores não tiveram muita discrepância entre si. O contrário acontece com os preços, um desvio padrão e media altos indicam que os valores ao longo do tempo possuem bastante discrepância entre si. O volume de negociação entre os agentes fundamentalistas é zero, pois, tendo só um tipo de agente, não existe troca entre eles.

### 2.2.2 Modelo com agentes fundamentalistas e grafistas ou extrapoladores

No caso do modelo com extrapoladores, indexados por  $i \in I$ , para  $i = \{1, \dots, I\}$ , e cada um diferente do outro, a demanda per capita extrapoladora compartilhada no tempo  $t$  é

$$N_t^E = \frac{(1 - \theta) \sum_{k=1}^{t-1} \theta^{k-1} (P_{t-k} - P_{t-k-1}) + \theta^{t-1} X_1}{\gamma \sigma_\varepsilon^2} \quad (12)$$

Onde  $X_t$  é a especificação da demanda extrapoladora, que é o numerador da equação (12),  $X_1$  mede o entusiasmo do extrapolador no tempo 1 (constante neutra e estável),  $\theta$  determina a magnitude do sinal de crescimento de  $X_t$  cujo valor é aproximado e extraído de Barberis et. al. (2015) ( $0 < \theta < 1$ ;  $\theta \cong 0.9$ ).

Modificamos a expressão original do trabalho de Barberis *et al.* (2018) de  $X_t$  e, no Apêndice, apresentamos sua prova, a fórmula reescrita ficou

$$X_t = (1 - \theta)(P_{t-1} - P_{t-2}) + \theta X_{t-1} \quad (13)$$

Sendo  $P_{t-1}$  e  $P_{t-2}$  os preços passados nos tempos  $t-1$  e  $t-2$ , respectivamente, para  $t = \{1, \dots, T = 50\}$  e  $X_{t-1}$  a especificação da demanda no tempo anterior. Todos os parâmetros e constantes permanecem os mesmos do modelo anterior.

Barberis *et al.* (2018) fizeram mais uma modificação na demanda extrapoladora, colocando-a com uma média ponderada (peso  $w_{i,t}$ ) de dois valores:

$$N_t^{E,i} = w_{i,t} \left( \frac{D_t - \gamma \sigma_\varepsilon^2 (T - t - 1) Q - P_t}{\gamma \sigma_\varepsilon^2} \right) + (1 - w_{i,t}) \left( \frac{X_t}{\gamma \sigma_\varepsilon^2} \right) \quad (14)$$

Em que  $w_{i,t}$  é calculado como:

$$w_{i,t} = w_i + u_{i,t} \quad (15)$$

Onde  $u_{i,t} \sim N(0, \sigma_u^2)$  é uma variável aleatória normal identicamente distribuída ao longo do tempo e  $w_i$  é o peso no primeiro componente ( $w_i = 0,1$ ). Para que o valor de  $w_{i,t}$  permaneça no intervalo  $(0,1]$ , os autores truncaram a distribuição de  $u_{i,t}$ .

Assim, eles mostram que o preço de equilíbrio da ação na economia é dado por

$$P_t = D_t + \frac{\sum_{i \in I^*} \mu_i (1 - w_{i,t})}{\sum_{i \in I^*} \mu_i w_{i,t}} X_t - \gamma \sigma_\varepsilon^2 Q \frac{(\sum_{i \in I^*} \mu_i w_{i,t})(T - t - 1) + 1}{\sum_{i \in I^*} \mu_i w_{i,t}} \quad (16)$$

Em que,  $I^* = \{0,1, \dots, 50\}$  tipos de extrapoladores e  $i = 0$ , englobando os agentes fundamentalistas como Barberis *et al.* (2018) mostra. O retorno das ações é dado por:

$$R(t) = \frac{P(t) + D(t)}{P(t-1)} - 1 \quad (17)$$

O volume de negociação é dado por:

$$Volume(t) = 0.5(\mu_0 |N_t^F - N_{t-1}^F| + \sum_{i=1}^I \mu_i |N_t^{E,i} - N_{t-1}^{E,i}|) \quad (18)$$

Para colocar de forma mais simples, durante uma bolha, os extrapoladores que detêm o ativo de risco estão sujeitos a dois sinais de investimento. Por um lado, eles vêem que os preços estão muito acima do valor fundamental; isso os deixa com medo de um *crash* e os incentiva a vender. Por outro lado, os preços subindo rapidamente fazem com que os extrapoladores esperem uma contínua valorização dos preços e os estimulam a comprar. Esses dois sinais impactam no portfólio das ações e conseqüentemente no volume de negociação (BARBERIS *et. al.*, 2018).

Nos três estágios da bolha, **(i)** a notícia do fluxo de caixa aumenta o preço do ativo de risco; os grafistas aumentam acentuadamente sua demanda pelo ativo, comprando de agentes fundamentalistas; **(ii)** o ativo torna-se supervalorizado; assim, os fundamentalistas saem do mercado, deixando o ativo nas mãos dos grafistas que negociam uns com os outros por causa da oscilação ou *wavering*. Uma vez que as boas notícias sobre o fluxo de caixa diminuem, os preços param de subir tão rapidamente, o entusiasmo do extrapolador diminui, e a bolha começa seu colapso; **(iii)** os preços caem o suficiente para que os fundamentalistas voltem a entrar no mercado, comprando de extrapoladores (BARBERIS *et. al.*, 2018).

A mensagem central na discussão acima é que uma quantidade fixa de oscilação ( $\sigma_u = 0.03$ ) pode gerar endogenamente volume de negociação muito alto durante períodos de bolha. Especificamente, no primeiro estágio da bolha, o extrapolador compra de agentes fundamentalistas, mesmo na ausência de oscilação; e à medida que a bolha cresce em seu segundo estágio, ele compra de extrapoladores menos otimistas ou ele vende para extrapoladores mais otimistas (BARBERIS *et. al.*, 2018).

Barberis *et. al.* (2018) concluem a discussão sobre o volume de negociação com dois pontos. Em primeiro lugar, fontes alternativas de heterogeneidade entre extrapoladores não geram tanto volume de negócios durante o período da bolha. Especificamente, variando os valores de alguns parâmetros como: definindo  $\sigma_u$  para 0 e, em vez disso, permitindo que os pesos base  $w_i$  e o parâmetro de ponderação  $\theta$  sejam diferentes entre extrapoladores, não se obtém grande volume na bolha. Como a maioria dos extrapoladores deseja negociar na mesma direção, há relativamente pouca negociação entre eles. Segundo, as previsões sobre preços e volume dependem principalmente da presença de extrapoladores que oscilam entre dois sinais; a restrição de venda a

descoberto<sup>11</sup> não é tão importante. Eles incorporaram a restrição de venda no modelo porque os *traders* fundamentalistas são racionalmente limitados. Esses investidores não tentam prever a demanda dos grafistas, mas simplesmente assumem que qualquer precificação incorreta será corrigida até a próxima data (BARBERIS *et. al.*, 2018).

A simulação de Barberis *et. al.* (2018), considerando os dois tipos de investidores no mercado (fundamentalistas e grafistas), teve como resultado:

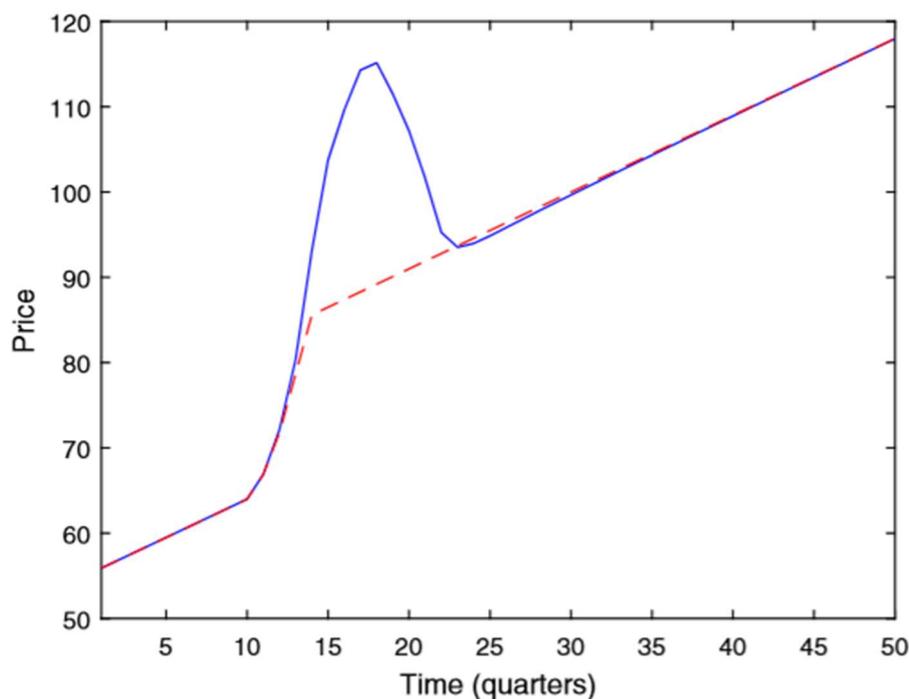


Fig. 3(a)

---

<sup>11</sup> Venda a descoberto (*short sale*) consiste na venda de um ativo ou derivativo que não se possui, esperando que seu preço caia para então comprá-lo de volta e lucrar na transação. É uma operação tradicional em mercados financeiros para lucrar em épocas de baixa, com a desvalorização e quedas de preço das ações, ou outros ativos.

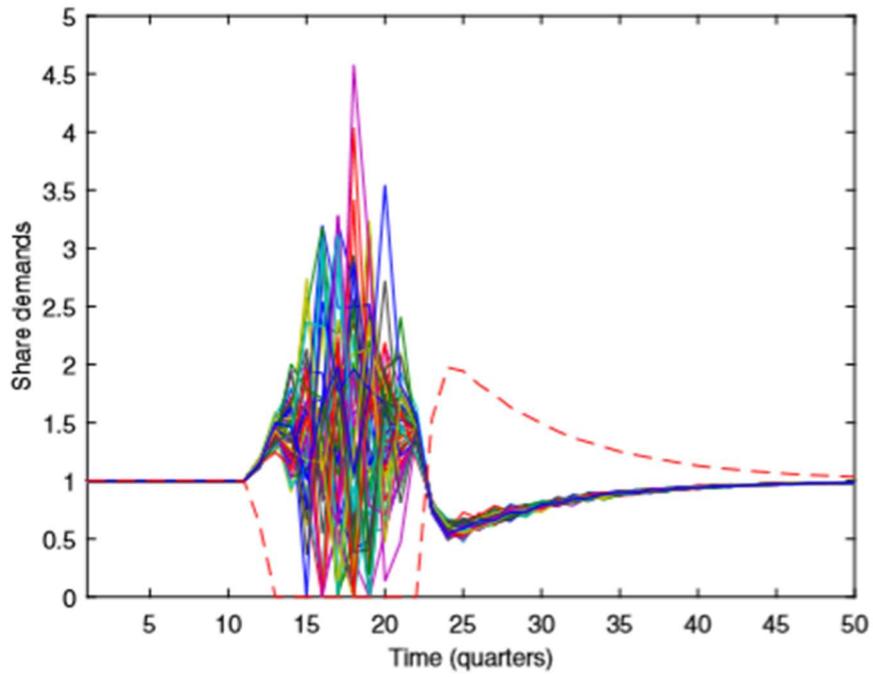


Fig. 3(b)

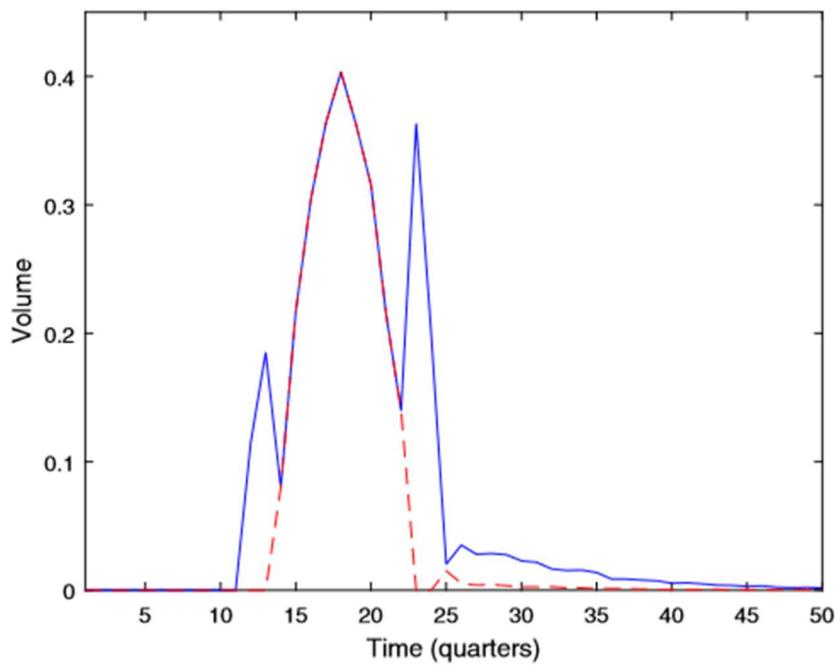


Fig. 3(c)

**Figura 3: Comportamento do preço (a), demanda (b)**

**e volume (c) no mercado artificial.****Fonte: N. Barberis *et. al.* (2018)**

Na Fig.3(a), a trajetória em vermelho no gráfico representaria o comportamento do valor fundamental do preço e, a trajetória em azul, o preço de equilíbrio e conseqüentemente criando uma bolha no mercado, pois como os preços sobem, os fundamentalistas acabam saindo do mercado e vendendo ações para os grafistas; nesse aumento, os extrapoladores negociam entre si até o momento do *crash* (tempo  $t = 18$  a  $t = 23$ ) da bolha em que os preços começam a cair e os fundamentalistas voltam para o mercado comprando dos extrapoladores. Na Fig.3(b), as linhas sólidas mostram as demandas para os 50 tipos de extrapoladores e a linha tracejada representa a demanda dos agentes fundamentalistas para a mesma sequência de fluxo de caixa. Note-se que no *boom* (tempo  $t = 12$  a  $t = 17$ ) do mercado, ocorre o maior número de alterações nas demandas dos agentes devido à volatilidade dos preços. Na Fig.3(c), a linha sólida mostra o volume total de negociação na bolha e a linha tracejada o volume de negociação entre os extrapoladores. Como mencionado, não existem fundamentalistas no mercado e os grafistas trocam ações entre si. Nesse momento, também se têm os maiores índices de volume de negociação devido ao fato de existirem 50 tipos de agentes negociando entre si. Ao detalhar os resultados encontrados em Barberis *et. al.* (2018) para preço, demandas, taxa de retorno e volume, encontramos as seguintes figuras.

Em nossas simulações os resultados foram:

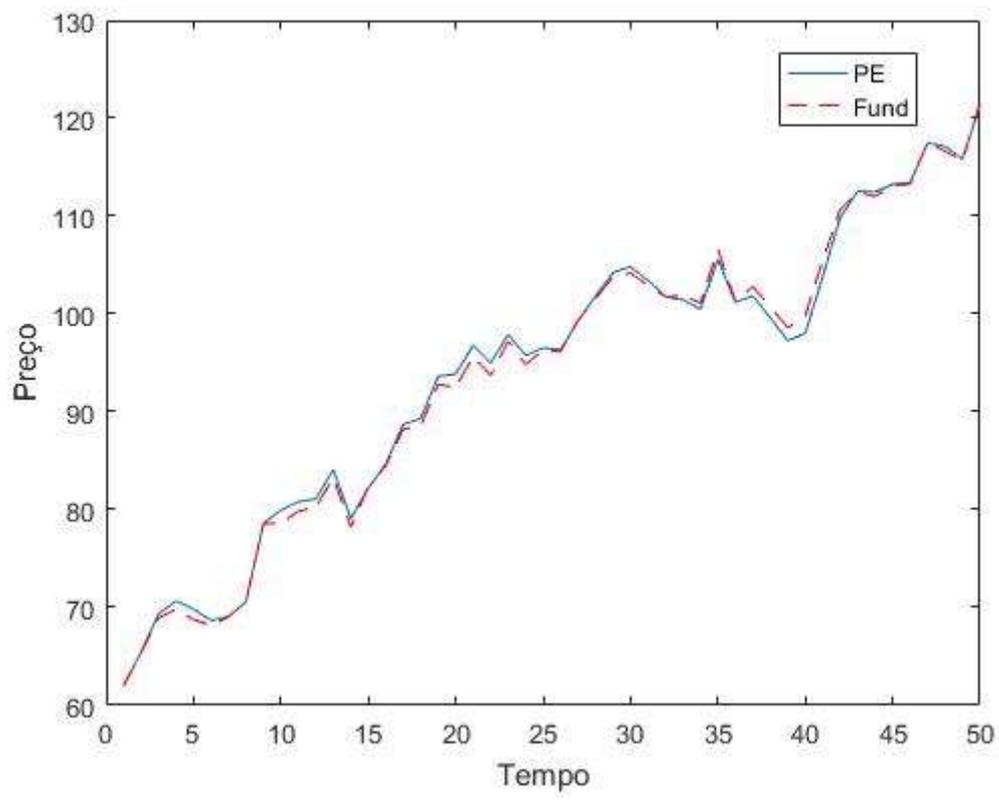


Fig. 4(a)

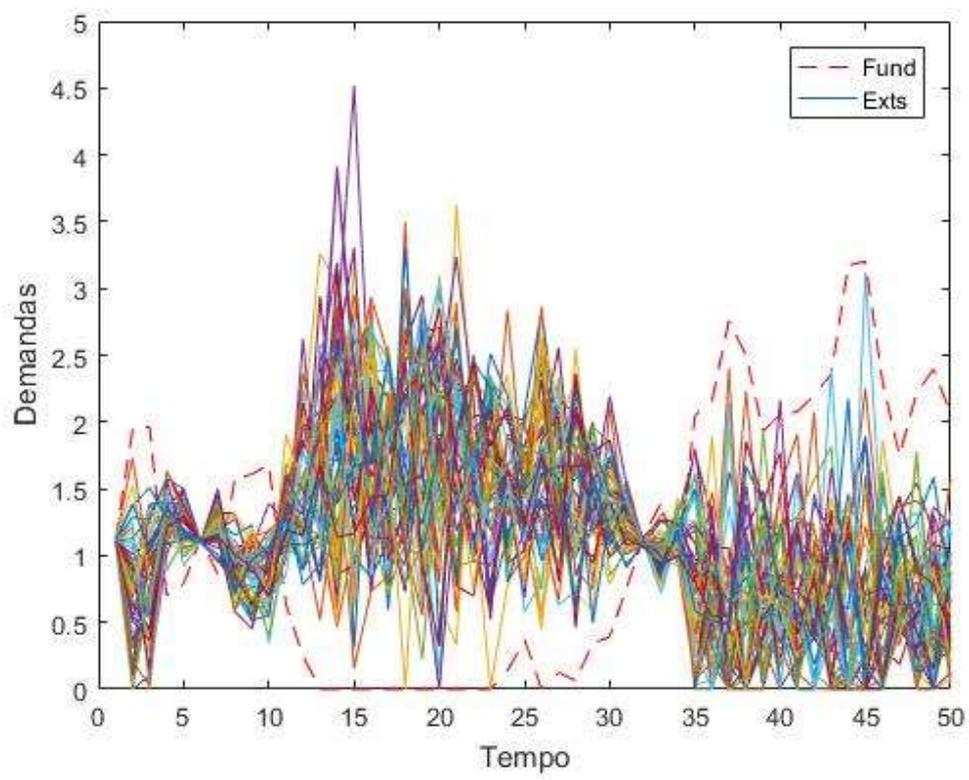


Fig. 4(b)

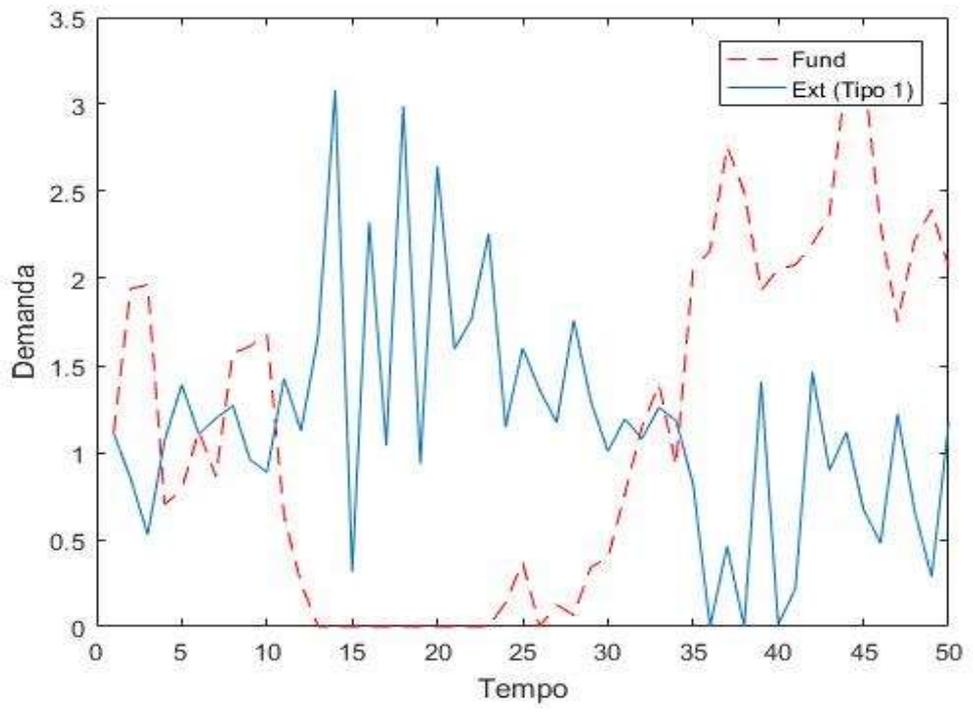


Fig. 4(c)

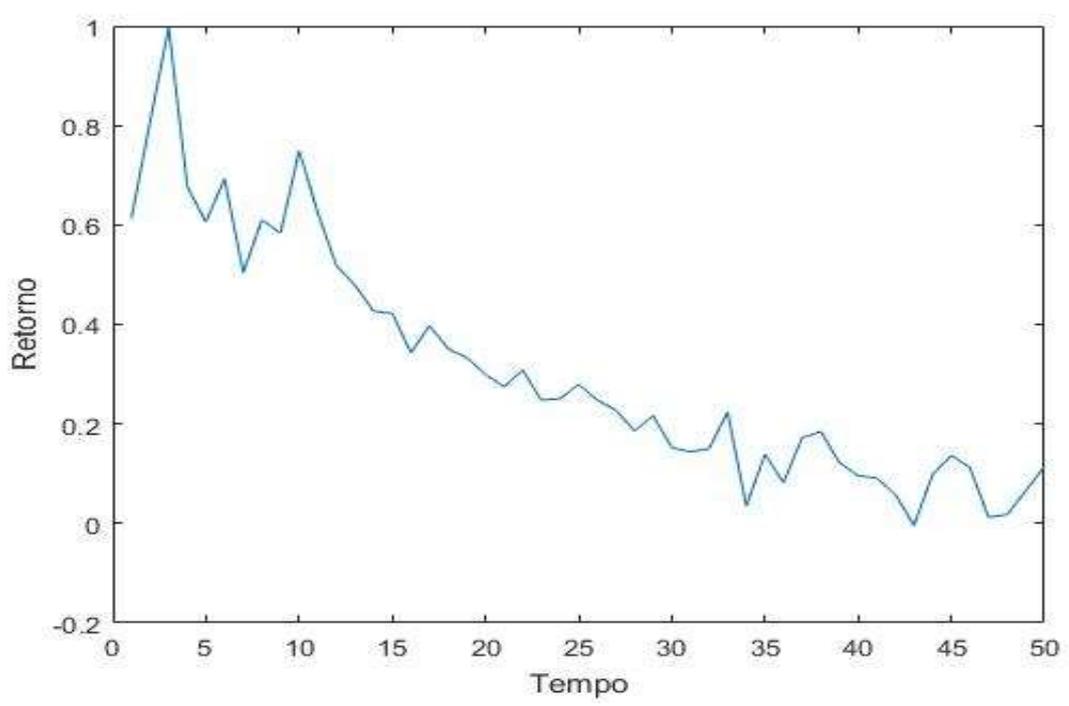


Fig. 4(d)

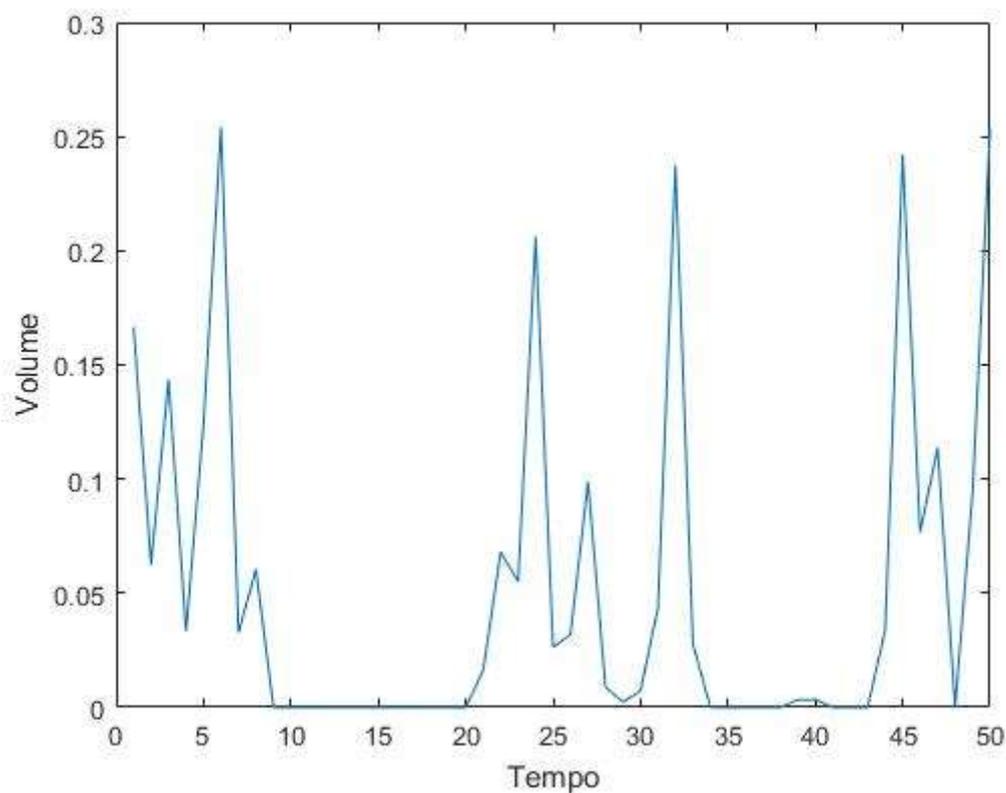


Fig. 4(e)

**Figura 4: Comportamento do preço (a), das demandas (b), da demanda para o tipo 1 extrapolador (d), retorno (d) e volume (e) em relação ao tempo ( $T=50$ ).**

**Fonte: Elaboração própria.**

Na Fig.4(a), a trajetória em vermelho no gráfico representaria o comportamento do valor fundamental do preço e a trajetória em azul o preço de equilíbrio do mercado, onde, com os preços aumentando, os fundamentalistas saem do mercado e no *boom* ( $t = 10$  a  $32$ ) da bolha só grafistas trocam entre si. Por outro lado, no *crash* ( $t = 28$  a  $36$ ) da bolha os fundamentalistas voltam ao mercado comprando dos grafistas na expectativa de lucro. Na Fig.4(b), as linhas sólidas mostram as demandas para os 50 tipos de extrapoladores e a linha tracejada representa a demanda dos agentes fundamentalistas

para a mesma sequência de fluxo de caixa. Na Fig.4(c), a linha sólida representa o comportamento da demanda do primeiro tipo de extrapolador (tipo 1) e a linha tracejada representa a demanda dos agentes fundamentalistas para a mesma sequência de fluxo de caixa. A Fig.4(d) representa o comportamento do retorno das ações nos 50 instantes de tempo, interessante notar que a taxa de retorno cai acentuadamente. Na Fig.4(e) a linha sólida mostra o volume total de negociação na bolha na mesma sequência de fluxo de caixa.

Elaboramos uma análise de estatística descritiva em cima das variáveis retorno e preço com  $T=50$ :

	Média	Desvio Padrão	Moda	Mediana	Curtose	Assimetria
Retorno	25%	0.4266	-18%	15%	3.4757	0.8972
Preço	107.2314	38.4703	32.7237	113.8808	3.0093	0.0917

**Tabela 2: Estatística descritiva para o modelo completo.**

**Fonte: Elaboração própria**

O excesso de curtose e o valor da assimetria dos retornos sugerem que a distribuição desta variável não apresenta comportamento de uma distribuição aleatória normal. O desvio padrão baixo e a média baixa dos retornos indicam que os valores não tiveram muita discrepância entre si. O contrário acontece com os preços, um desvio padrão e media altos indicam que os valores ao longo do tempo tiveram bastante discrepância entre si. A seguir temos uma tabela especificando os valores do volume de negociação no modelo com a agentes fundamentalistas e grafistas:

Tempo (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9-20	21	22	23
Volume	0,16	0,06	0,14	0,03	0,13	0,25	0,03	0,06	0	0,02	0,06	0,05

Tempo (t)	24	25	26	27-32	33	34-44	45	46	47	48	49	50
Volume	0,2	0,02	0,03	0,067	0,04	0	0,25	0,07	0,15	0	0,01	0,26

**Tabela 3: Volume de negociação entre todos os agentes**

**Fonte: Elaboração própria**

Note-se que no *boom* dos preços ( $t = 10$  a  $20$  e  $t = 32$  a  $43$ ) não há volume de negociação ou ele é quase zero, diferente dos *crashes* ( $t = 22$  a  $31$  e  $44$  a  $50$ ) e do início onde os preços diminuíam e conseqüentemente o volume de negociação atinge seus maiores valores.

### 2.2.3 Modelo com Aversão à perda no comportamento dos grafistas

Em seguida abordaremos a condição de aversão à perda no comportamento dos agentes extrapoladores e alguns resultados. A Psicologia Cognitiva explica que aversão à perda é um viés comportamental que nos faz atribuir maior importância às perdas do que aos ganhos, nos induzindo frequentemente a correr mais riscos no intuito de tentar reparar eventuais prejuízos. Alguns estudos sugerem que isso se dá porque, do ponto de vista psicológico, a dor da perda é sentida com muito mais intensidade do que o prazer com o ganho. Essa assimetria na forma como as perdas e ganhos são sentidos nos leva também ao medo de desperdiçar boas oportunidades de investimento. Além disso, a aversão à perda pode fazer o investidor insistir em investimentos sem perspectiva futura de melhora, seja pelo medo da dor de realizar prejuízo, seja pela recusa em admitir eventuais erros na escolha da aplicação. Outro efeito potencialmente prejudicial desse viés é fazer o

investidor liquidar precipitadamente as posições lucrativas e ainda promissoras, por receio de perder o que já foi ganho.

Kahneman e Tversky (1979) propõem um problema para explicar este efeito. Imagine uma situação: jogar uma moeda ao acaso. Em que a perda de US\$100 caso o resultado do jogo fosse coroa e um ganho de US\$150 caso o resultado fosse cara. O efeito observado nesse exemplo mostrou uma forte rejeição em relação à aposta, embora o valor esperado da mesma seja positivo, pois se está sujeito a um ganho maior do que uma perda, o medo de perder US\$100, é mais intenso do que a esperança de ganhar US\$150. Sendo assim o resultado de diversos experimentos mostra que a maioria dos indivíduos necessita de mais ou menos o dobro, ou seja, o ganho deveria ser de US\$200, ou mais, para “valer a pena” entrar nessa aposta. Partindo dessa observação, os autores estimaram a razão da aversão à perda em 2,25. Todavia, Kahneman e Novemsky (2005) chegaram à conclusão, após a observação do resultado de diversos experimentos, de que a aversão à perda se situa entre 1,5 e 2,5; isso porque a subjetividade individual de cada um faz com que algumas pessoas são mais avessas a perdas do que outras.

Em um mercado de ações, uma comparação entre o preço de equilíbrio (preço de mercado) e a expectativa de preço, de um determinado ativo, pode levar a aversão à perda. Um preço de equilíbrio inferior ao preço esperado sinaliza uma perda para o agente que está presente no mercado. Equivalente a, se o preço de equilíbrio for maior que sua expectativa de preço, o agente considerará um ganho.

Sobre a mudança na expectativa de preço, a equação (A.10) do trabalho de Barberis *et. al.* (2018) nos mostra isso:

$$\mathbb{E}_t^X(\widetilde{P}_{t+1} - P_t) = (1 - \theta) \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{k-1} (P_{t-k} - P_{t-k-1}) \equiv X_t \quad (19)$$

E em nosso caso a mudança no preço real será dada por:

$$\Delta = P_t - P_{t-1} \quad (20)$$

Então aversão à perda, denotada por  $\alpha = 2,25$ , atuará da seguinte maneira, em que  $P_t^a$  é o preço ajustado sob a condição do viés emocional, assim:

$$\begin{aligned} \text{se } X(t) > \Delta \rightarrow P_t^a = D_t + \frac{\sum_{i \in I^*} \mu_i (1 - w_{i,t})}{\sum_{i \in I^*} \mu_i w_{i,t}} \alpha X_t \\ - \gamma \sigma_\varepsilon^2 Q \frac{(\sum_{i \in I^*} \mu_i w_{i,t})(T - t - 1) + 1}{\sum_{i \in I^*} \mu_i w_{i,t}} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{se } X(t) \leq \Delta \rightarrow P_t^a = P_t \quad (22)$$

Assim, se a mudança na expectativa do preço ( $X_t$ ) for maior que a mudança no preço real ( $\Delta$ ), os agentes grafistas sentem uma perda de valor dos ativos de risco e, portanto, eles corrigem suas expectativas pelo coeficiente de aversão à perda ( $\alpha$ ). Entretanto, se ( $X_t$ ) for menor que a mudança no preço real ( $\Delta$ ), os agentes entendem que os preços seguem uma tendência crescente; logo, não haverá uma perda no valor do ativo de risco, de tal modo que sua expectativa de preços futuros permanece conforme a equação 19.

O novo gráfico dos preços, as mudanças real e esperada além do volume de negociação foram:

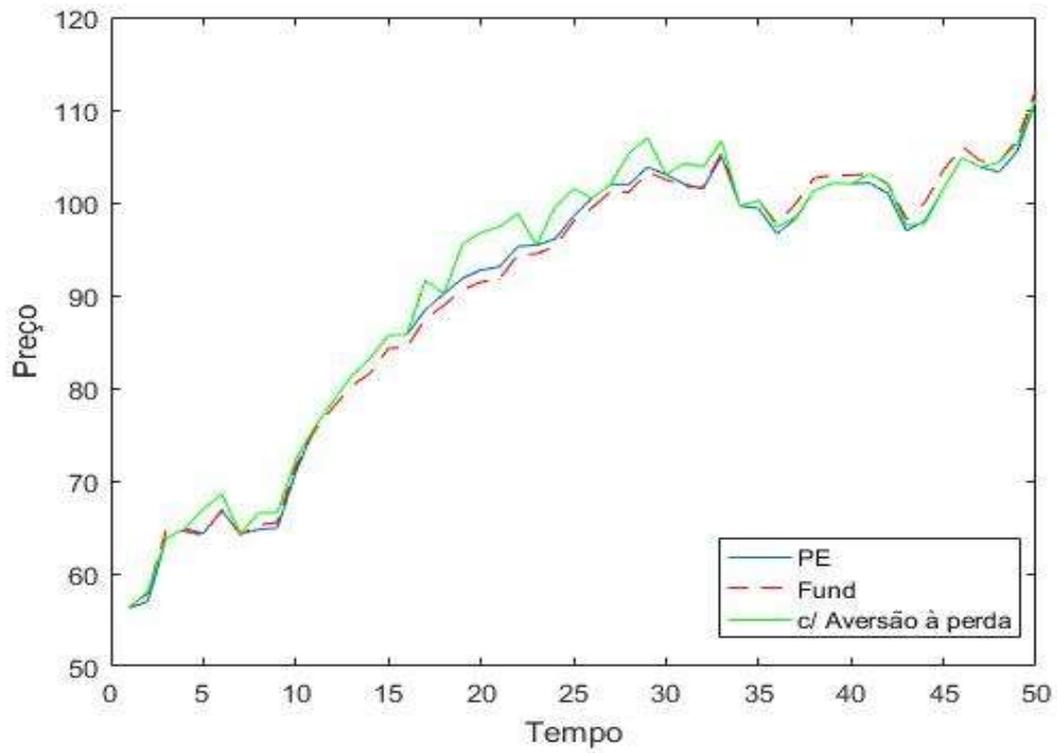


Fig. 5(a)

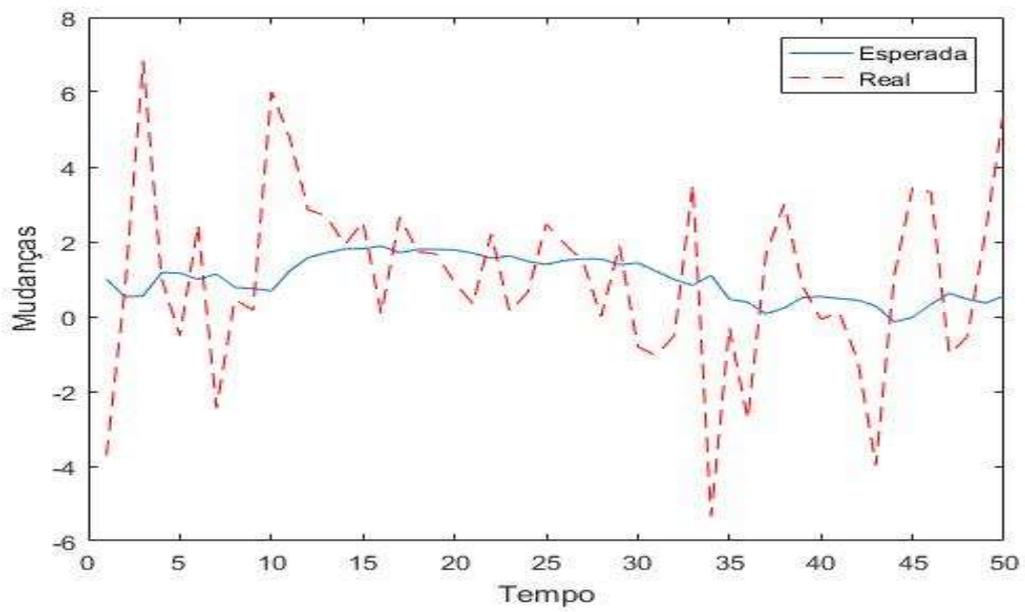


Fig. 5(b)

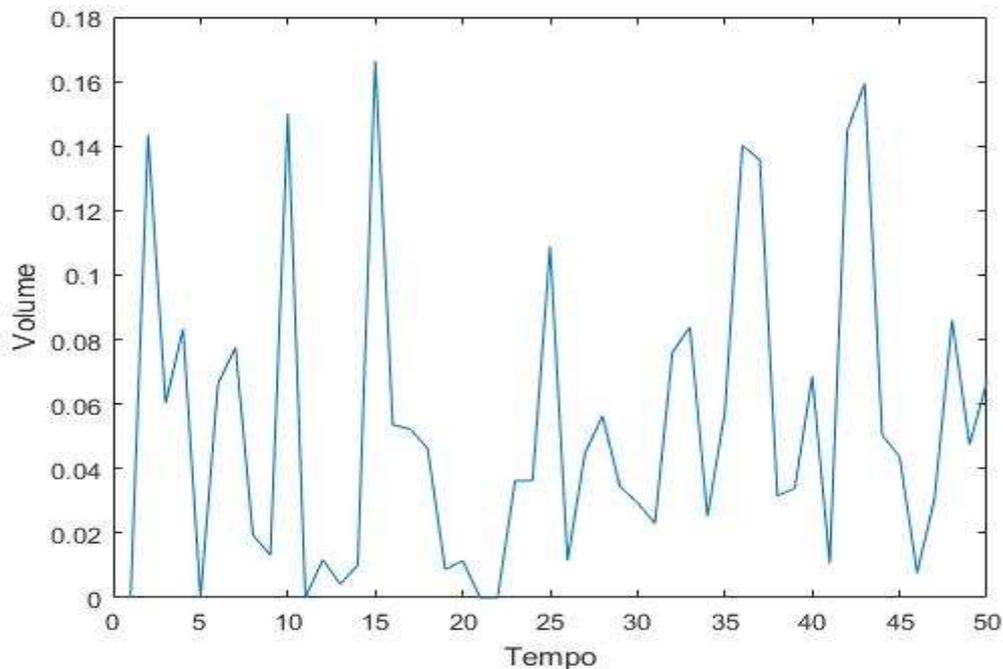


Fig. 5(c)

**Figura 5: Comportamento dos preços (a), das mudanças real e esperada (b) e do volume de negociação com aversão à perda(c)**

**em relação ao tempo ( $T=50$ ).**

**Fonte: Elaboração própria.**

Na Fig. 5(a) a linha azul representa o comportamento do preço de equilíbrio, a linha vermelha tracejada o do preço fundamental e a linha verde o do preço ajustado quando a condição de aversão à perda é satisfeita. Na Fig. 5(b) a linha azul representa o comportamento da mudança do preço real e a linha vermelha tracejada o da mudança de preço esperado. Na Fig. 5(c) a linha azul representa o volume de negociação entre os agentes com a presença do viés emocional aversão à perda.

Note-se que na Fig. 5(b), quando a mudança esperada (linha azul) é superior a mudança real (linha vermelha tracejada) automaticamente na Fig. 5(a) o preço é ajustado e ficando acima do preço de equilíbrio.

Foi elaborado uma análise de estatística descritiva em cima das variáveis retorno e preço com  $T=50$  e a condição de aversão à perda:

	Média	Desvio Padrão	Moda	Mediana	Curtose	Assimetria
Retorno	30%	0,24	-0,05%	25%	3,05	0,86
Preço	90,35	15,3	56,3	96,8	3,15	-0,92

**Tabela 4: Estatística descritiva para o modelo com aversão à perda.**

**Fonte: Elaboração própria**

O excesso de curtose e o valor da assimetria dos retornos sugerem que a distribuição desta variável não apresenta comportamento de uma distribuição aleatória normal. O desvio padrão baixo dos retornos indicam que os valores não tiveram muita discrepância entre si. O contrário acontece com os preços, um desvio padrão e media altos indicam que os valores ao longo do tempo tiveram bastante discrepância entre si. A seguir temos uma tabela especificando os valores do volume de negociação no modelo com agentes fundamentalistas e grafistas com aversão à perda:

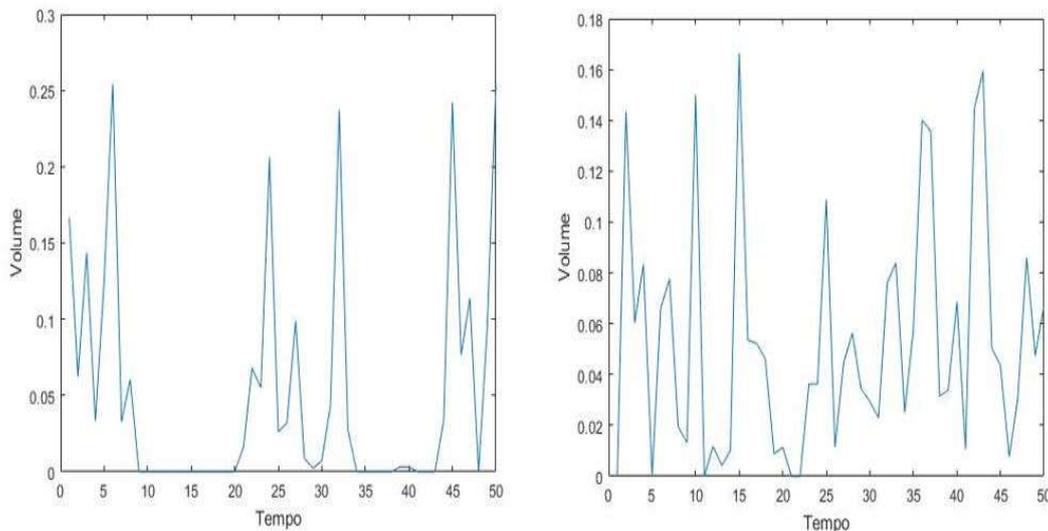
Tempo (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9-26	27	28	29
Volume	0	0,14	0,06	0,08	0	0,07	0,08	0,02	0,04	0,04	0,06	0,03

Tempo (t)	30	31	32	33-37	38	39	40	41	42-47	48	49	50
Volume	0,03	0,02	0,08	0,09	0,03	0,03	0,07	0,01	0,07	0,09	0,05	0,07

**Tabela 5: Volume de negociação com aversão à perda**

**Fonte: Elaboração própria**

Diferentemente do comportamento do preço de equilíbrio da Fig. 4(a) e do volume da Fig. 4(e), o comportamento do volume com relação ao preço ajustado a aversão à perda na Fig. 5 apresenta trajetórias parecidas e os valores absolutos diminuem.



**Figura 6: Comparação do volume de negociação sem (a) e com (b) aversão à perda.**

**Fonte: Elaboração própria.**

Notamos uma maior variação no volume de negociação com o viés emocional, isso porque os agentes fazem troca com mais frequência para evitar possíveis perdas.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

No modelo estudado, alguns investidores sustentam expectativas extrapolativas, mas não em todo momento, pois se preocupam com a possível supervalorização do ativo. Sendo assim o modelo gera bolhas ocasionais nos preços dos ativos, como mostra a Fig. 4(a). As bolhas, como foi dito, ocorrem dos padrões particulares da boa notícia do ativo e assim com um alto volume de negociação, esse que se mostrou contrário ao preço, pois quando os preços sobem, os agentes fundamentalistas acabam deixando o mercado fazendo com que só haja negociação entre os grafistas e assim o volume total de negócio quase nulo. Por outro lado, quando os preços começam a diminuir os fundamentalistas

voltam ao mercado e assim com muitas trocas o volume de negociação total do mercado volta a subir.

Com relação ao grau de “*wavering*” ou oscilação, como ele impacta diretamente nas demandas de ações dos grafistas, assim, notamos que quanto maior o seu valor, maior será a discrepância de valores de demandas entre os tipos de extrapoladores e conseqüentemente se o seu valor for baixo ou próximo a zero, as demandas serão bem próximas e não havendo diferença entre elas.

Em nossa modelagem, diferente da original de Barberis *et. al.* (2018), abordamos o viés emocional de aversão à perda nos grafistas, onde chegamos em valores do preço de equilíbrio se distanciando do valor do preço fundamental (bolhas mais visíveis e apresentadas), fazendo com que com preços maiores tendo assim um retorno maior.

## REFERÊNCIAS

BARBERIS, N; GREENWOOD, R; JIN, L; SHLEIFER, A (2015) *X-CAPM: “An extrapolative capital asset pricing model” Journal of Financial Economics 115, 1–24.*

BARBERIS, N; GREENWOOD, R; JIN, L; SHLEIFER, A (2018) “*Extrapolation and bubbles*” *Journal of Financial Economics Volume 129, Issue 2, August 2018, Pages 203-227.*

BARBERIS, N; SHLEIFER, A (2003) “*Style investing*” *Journal of Financial Economics 68, 161–199.*

BARBERIS, N; THALER R (2003) “*A survey of behavioral finance*” *Handbook of the Economics of Finance 1: 1053–1128.*

BERTELLA, MA; PIRES, FR; FENG, L; STANLEY, HE (2014) “*Confidence and the Stock Market: An Agent-Based Approach*” *Plos One* 9(1), e83488.

BERTELLA, MA; PIRES, FR; REGO, HHA; SILVA, JN; VODENSKA, I; STANLEY E (2017) “*Confidence and self-attribution bias in an artificial stock market*” *Plos One* Published: February 23 <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0172258>

BROCK, WA; HOMMES, CH (1989) “*Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model*” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22(8–9): 1235–1274.

CARLOS, A; NEAL, L; WANDSCHNEIDER, K (2006) “*Dissecting the anatomy of Exchange Alley: The dealings of stockjobbers during and after the South Sea bubble*” Unpublished working paper. University of Illinois.

CUTLER, D; POTERBA, J; SUMMERS, L (1990) “*Speculative dynamics and the role of feedback traders*” *American Economic Review Papers and Proceedings* 80, 63–68.

DE LONG, B; SHLEIFER, A; SUMMERS, L; WALDMANN R; (1990) “*Positive feedback investment strategies and destabilizing rational speculation*” *Journal of Finance* 45, 379–395.

FAMA, E. (1970). “*Efficient capital markets: a review of theory and empirical work*” *Journal of Finance* 25:383–417.

GALBRAITH J (1954) “*The Great Crash: 1929*” Houghton Mifflin Co., Boston, MA.

GLASER, M; WEBER, M (2007) “*Overconfidence and trading volume*” *The Geneva Risk and Insurance Review*, v. 32, n. 1, p. 1-36, 2007. Disponível em: [https://madoc.bib.uni-mannheim.de/275/1/weber\\_papers03.pdf](https://madoc.bib.uni-mannheim.de/275/1/weber_papers03.pdf). Acesso em: set. 2018.

GRIMM, V; BERGER, U; DEANGELIS, DL; POLHILL, JG; GISKE, J; RAILSBACK SF (2006) “*The ODD protocol: A review and first update*” *Elsevier* <https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2010.08.019>.

HARUVY, E; LAHAV, Y; NOUSSAIR, C; (2007) “*Traders’ expectations in asset markets: experimental evidence*” *American Economic Review* 97, 1901–1920.

HONG, H; STEIN, J (1999) “*A unified theory of underreaction, momentum trading, and overreaction in asset markets*” *Journal of Finance* 54, 2143–2184.

HONG, H; STEIN, J (2007) “*Disagreement and the stock market*” *Journal of Economic Perspectives* 21, 109–128.

KAHNEMAN, D. NOVEMSKY, N. (2005) *The Boundaries of loss aversion. Journal of Marketing Research*, v. 42.

KAHNEMAN, D; TVERSKY, A (1974) “*Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*” *Science* 27 Sep1974: Vol. 185, Issue 4157, pp. 1124-1131.

KAHNEMAN, D; TVERSKY, A (1979) “*On the interpretation of intuitive probability: A reply to Jonathan Cohen*” *Cognition*, 7(4), 409-411.

KIM, G; MARKOWITZ, HM (1989) “*Investment rules, margins, and market volatility*”  
*Journal of Portfolio Management*, 16(1):45–52.

KINDLEBERGER C (1978) “*Manias, Panics, and Crashes: A History of Financial Crises*” *Basic Books*.

LEVY, M; LEVY, H; SOLOMON, S (2000) “*Microscopic Simulation of Financial Markets: From Investor Behavior to Market Phenomena*” Academic Press.

LOVRIC’ M (2011) *Behavioral Finance and Agent-Based Artificial Markets*. Erasmus University Rotterdam.

MISHKIN FS (2011) *The economics money, banking and financial markets*. Pearson Education.

PIRES, FR (2012). “Finanças comportamentais e modelos baseados em agentes” 122 f. Dissertação (mestrado acadêmico) Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Letras de Araraquara-SP, 2012. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/99146>. Acesso em: mar. 2018.

RABELO JUNIOR, TS; IKEDA, RH (2004) “Mercados eficientes e arbitragem: um estudo sob o enfoque das finanças comportamentais” *Revista de Contabilidade e Finanças*, v.15, n.34, p.97107. Disponível em: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S151970772004000100007&lng=en&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S151970772004000100007&lng=en&nrm=iso). Acesso em: ago. 2018.

RAILSBACK, SF; GRIMM, V (2005) *Individual-based Modeling and Ecology*. Princeton University Press. Copyright by Princeton University Press.

RAILSBACK, SF; GRIMM, V (2012) *Agent Based and Individual-Based Modeling: A practical introduction* Princeton University Press, Copyright by Princeton University Press.

SALINAS, SRA (2005) “Einstein e a teoria do movimento browniano” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, n. 2, p. 263-269. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v27n2/a13v27n2.pdf>. Acesso em: mar. 2019.

SMITH, V; SUCHANEK, G; WILLIAMS, A; (1988) “*Bubbles, crashes, and endogeneous expectations in experimental spot asset markets*” *Econometrica* 56, 1119–1151.

STARFIELD, A. (1990). “*Qualitative, Rule-Based Modeling. BioScience*”, 40(8), 601-604. doi:10.2307/1311300.

TAKAHASHI, H; TERANO, T (2003) “*Agent-based approach to investors' behavior and asset price fluctuation in financial markets*” *Journal of Artificial Societies and Social Simulation* 6: 3.

THALER R et.al. (1991) “*Anomalies: The Endowment Effect, Loss Aversion, and Status Quo Bias.*” *Journal of Economic Perspectives*, 5 (1): 193-206.

TVERSKY, A; KAHNEMAN, D (1986). “*Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*” *Science*, v. 185, n. 4157, p. 1124-1131. Disponível em: [https://www.socsci.uci.edu/~bskyrms/bio/readings/tversky\\_k\\_heuristics\\_biases.pdf](https://www.socsci.uci.edu/~bskyrms/bio/readings/tversky_k_heuristics_biases.pdf). Acesso em: mar. 2019.

TVERSKY, A; KAHNEMAN, D (1992) “*Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty*” *Journal of Risk and uncertainty* – Springer.

YOSHINAGA, C.; OLIVEIRA, R.; SILVEIRA, A.; BARROS, L. (2008) “*Finanças comportamentais: uma introdução*” REGE Revista de Gestão, v. 15, n. 3, p. 25-35, 1 set.

## APÊNDICE

Prova da fórmula (13):

Como anteriormente, a equação que Barberis *et. al.* (2018) usaram para a especificação da demanda grafista é dada por:

$$X_t = (1 - \theta) \sum_{k=1}^{t-1} \theta^{k-1} (P_{t-k} - P_{t-k-1}) + \theta^{t-1} X_1 \quad (\text{A.1})$$

Quando  $t = \{1, \dots, T=50\}$  sendo assim,

Para  $t = 1$ :

$$X_1 = (1 - \theta) \sum_{k=1}^0 \theta^{k-1} (P_{1-k} - P_{1-k-1}) + \theta^0 \quad (\text{A.2})$$

Como toda soma em zero o resultado é zero e todo número elevado a zero é igual a um, temos que:  $X_1 = X_1$  (constante neutra e estável igual a 1, como já havíamos definido)

Para  $t = 2$ :

$$X_2 = (1 - \theta) \sum_{k=1}^1 \theta^{k-1} (P_{2-k} - P_{2-k-1}) + \theta^1 X_1 \quad (\text{A.3})$$

Isso implica que  $X_2 = (1 - \theta)(P_1 - P_0) + \theta^1 X_1$  (A.4)

Para  $t = 3$ :

$$X_3 = (1 - \theta) \sum_{k=1}^2 \theta^{k-1} (P_{3-k} - P_{3-k-1}) + \theta^2 X_1 \quad (\text{A.5})$$

Isso implica que  $X_3 = (1 - \theta)[(P_2 - P_1) + \theta(P_1 - P_0)] + \theta^2 X_1$  (A.6)

$$X_3 = (1 - \theta)(P_2 - P_1) + \theta(1 - \theta)(P_1 - P_0) + \theta\theta X_1 \quad (\text{A.7})$$

$$X_3 = (1 - \theta)(P_2 - P_1) + \theta[(1 - \theta)(P_1 - P_0) + \theta X_1] \quad (\text{A.8})$$

$$X_3 = (1 - \theta)(P_2 - P_1) + \theta X_2 \quad (\text{A.9})$$

Para  $t = 4$ :

$$X_4 = (1 - \theta) \sum_{k=1}^3 \theta^{k-1} (P_{4-k} - P_{4-k-1}) + \theta^3 X_1 \quad (\text{A.10})$$

Isso implica que  $X_4 = (1 - \theta)[(P_3 - P_2) + \theta(P_2 - P_1) + \theta^2(P_1 - P_0)] + \theta^3 X_1$   
(A.11)

$$X_4 = (1 - \theta)(P_3 - P_2) + \theta(1 - \theta)(P_2 - P_1) + \theta\theta(1 - \theta)(P_1 - P_0) + \theta\theta\theta X_1 \quad (\text{A.12})$$

$$X_4 = (1 - \theta)(P_3 - P_2) + \theta[(1 - \theta)(P_2 - P_1) + \theta(1 - \theta)(P_1 - P_0) + \theta\theta X_1] \quad (\text{A.14})$$

$$X_4 = (1 - \theta)(P_3 - P_2) + \theta X_3 \quad (\text{A.15})$$

Note-se uma recorrência para as equações e seguindo o passo até  $t = 50$ , usando o princípio da indução encontramos a fórmula (13) usada no modelo com os dois tipos de agentes.

**Tabela 6: Valores dos parâmetros**

Parâmetros	Valores
$\theta$	0,9
$\sigma_\varepsilon^2$	3
$\sigma_u^2$	0,03
$D_0$	100
Q	1
$\gamma$	0,1
I	50
$w_i$	0,1
T	50
$\mu_0$	0,3
$w_0$	1

$\alpha$	2,25
----------	------

### **Código do modelo para agentes fundamentalistas.**

```
clear all
```

```
clc
```

```
% Model of bubbles %
```

```
% Parameters %
```

```
D0 = 100; % Dividendo inicial
```

```
acm = 0;
```

```
gama = 0.1;
```

```
Q = 1; % Oferta per capita do ativo
```

```
delta_epsilon = 3; % Desvio padrão dos choques de fluxo de caixa
```

```
T = 50; % Numero de periodos, como o intervalo de datas é um trimestre, a vida util do ativo é 12.5 anos
```

```
mi_zero = 1; % Fração de fundamentais na economia (30% fundamentais e 70% extrapoladores)
```

```
wi_t = 1;
```

```
Pt = 60;
```

```
tempo = zeros();
```

```
dividendo = zeros();
```

```
demanda = zeros();
```

```
demanda2 = zeros();
```

```
preco = zeros();
```

```
retorno = zeros();
```

```
l_retorno = zeros();
```

```

B = zeros();
P_inicial = 60;

% Investors
mi_E = 0.7; % mi_E fração de extrapoladores na economia, analogo a mi_F para os
fundamentais
mi_F = 0.3;

% Asset structure
for t = 1:T
    pd = random(makedist('Normal',0,9)); % ei iid ~ N(0,delta_epsilon^2)
    acm = pd + acm;
    Dt = D0 + acm;
    lambda = ((Dt-gama*delta_epsilon^2*(T-t-1)*Q-Pt)/(gama*delta_epsilon^2));
    Nt_F = max(((Dt-gama*delta_epsilon^2*(T-t-1)*Q-Pt)/(gama*delta_epsilon^2)),0);
% Para os fundamentalistas Pt_F é valor fundamental do ativo de risco
    Pt_F = Dt - gama*delta_epsilon^2*Q*((mi_zero*wi_t)^(T-t-1)+1)/(mi_zero*wi_t);
    l_retorno = log(Pt_F + Dt) - log(Pt);
    tempo(t) = t;
    dividendo(t) = Dt;
    demanda(t) = lambda;
    demanda2(t) = Nt_F;
    R = ((Pt_F + Dt)/Pt) - 2;
    retorno(t) = R;
    if Pt_F > 0
        preco(1) = P_inicial;
        preco(t) = Pt_F;
        Pt = Pt_F;
    end
end

disp('A media do retorno foi: ')
disp(mean(retorno))

```

```
disp('A media do preço foi: ')  
disp(mean(preco))
```

```
disp('O desvio padrao do retorno foi: ')  
disp(std(retorno))  
disp('O desvio padrao do preço foi: ')  
disp(std(preco))
```

```
disp('A moda do retorno foi: ')  
disp(mode(retorno))  
disp('A moda do preço foi: ')  
disp(mode(preco))
```

```
disp('A mediana do retorno foi: ')  
disp(median(retorno))  
disp('A mediana do preço foi: ')  
disp(median(preco))
```

```
disp('A kurtose dos retornos foi: ')  
disp(kurtosis(retorno))
```

```
disp('A kurtose dos preços foi: ')  
disp(kurtosis(preco))
```

```
disp('A assimetria dos retornos foi: ')  
disp(skewness(retorno))
```

```
disp('A assimetria dos preços foi: ')  
disp(skewness(preco))
```

```
save('var.mat','tempo','dividendo','demanda','demanda2','preco','retorno','l_retorno')
```

```
figure(1)  
subplot(1,2,1)
```

```
plot(tempo,preco)
xlabel('Tempo')
ylabel('Preço')
subplot(1,2,2)
plot(tempo,retorno)
xlabel('Tempo')
ylabel('Retorno')
```

```
figure(2)
subplot(1,2,1)
plot(tempo,dividendo)
xlabel('Tempo')
ylabel('Dividendo')
subplot(1,2,2)
plot(tempo,demanda)
xlabel('Tempo')
ylabel('Demanda')
```

```
figure(3)
plot(tempo,demanda2)
xlabel('Tempo')
ylabel('Demanda (Nt_F)')
```

### **Código do modelo completo.**

```
clear all
```

```
clc
```

```
% Model of bubbles %
```

```
% Parameters %
```

```
wi = 0.1; % Peso médio que o extrapolador i coloca sinal de valor %
```

```
teta = 0.9; % Determina a magnitude do sinal de crescimento de Xt, valor aproximado e  
tirado de Barberis et. al. (2015)
```

```

gama = 0.1;
D0 = 100; % Dividendo inicial
delta_epsilon = 3; % Desvio padrão dos choques de fluxo de caixa
Q = 1; % Oferta per capita do ativo
T = 50; % Numero de periodos, como o intervalo de datas é um trimestre, a vida util do
ativo é 12.5 anos
X1 = 1;
I_ = 51;
I = 50; % Tipos de extrapolators
mi_zero = 0.3; % Fração de fundamentalistas na economia (30% fundamentalistas e 70%
extrapoladores)
w_zero = 1; %%para os fundamentalistas, w=1 - vide equação 7 do paper.
wit = zeros(50);
tempo = zeros();
retorno = zeros();
dividendo = zeros();
Pt_F = zeros();
P = zeros();
demanda = zeros(50);
volume = zeros();
Nt = zeros();
acmXt = 0;
X = zeros();
P_inicial = 60;
Ntinicial = 10^(-10);
t = 1;
mi_i = zeros();
acmDi = zeros(50);
acmPi = zeros(50);
alpha = 2.5;

% Asset structure

```

```

while t <= T
    pd = random(makedist('Normal',0,3)); % ei iid ~ N(0,delta_epsilon^2)
    Dt = D0 + pd;
    PtF = Dt - gama*delta_epsilon^2*(T-t)*Q;
    Pt_F(t) = PtF;
    dividendo(t) = Dt;

    if t == 1
        X(t) = X1;
        acmXt =+ X(t);
    end

    if t == 2
        X(t) = (1-teta)*(P(t-1) - P_inicial) + teta*X(t-1);
        acmXt =+ X(t);
    end

    if t > 2
        X(t) = (1-teta)*(P(t-1) - P(t-2)) + teta*X(t-1);
        acmXt =+ X(t);
    end

    end

    for i = 1:I_
        pd2 = random(makedist('Normal',0,0.3));
        ui_t = pd2;
        while ui_t < -0.09 && ui_t >= 0.09
            pd2 = random(makedist('Normal',0,0.3));
            ui_t = pd2;
        end

        if t == 1
            Nt(i) = 10^(-10);
        end
    end
end

```

```

if i == 1 && Nt(i)>=0
    wit(i,t) = w_zero;
    mi = mi_zero;
    acmDi(i,t) = mi*(1-wit(i,t));
    acmPi(i,t) = mi*wit(i,t);
end

if i > 1 && Nt(i)>=0
    wit(i,t) = wi + ui_t;
    mi = (1 - mi_zero)/I;
    acmDi(i,t) = acmDi(i-1,t) + mi*(1-wit(i,t));
    acmPi(i,t) = acmPi(i-1,t) + mi*wit(i,t);
end

mi_i(i) = mi;
end

Pt = Dt + (acmDi(51,t)/acmPi(51,t))*X(t) -
(gama*delta_epislon^2*Q*acmPi(51,t)*(T-t-1)+1)/acmPi(51,t);

if Pt >= 0
    P(t) = Pt;

for i = 1:I_
    if i == 1
        Nt_F = max(((Dt-gama*delta_epislon^2*(T-t-1)*Q -
Pt)/(gama*delta_epislon^2)),0);
        Nt(i) = Nt_F;
        demanda(i,t) = Nt(i);
    end
    if i > 1
        Nt_E = max(wit(i,t)*((Dt-gama*delta_epislon^2*(T-t-1)*Q -
Pt)/(gama*delta_epislon^2))+(1-wit(i,t))*(X(t)/(gama*delta_epislon^2)),0);
        Nt(i) = Nt_E;
    end
end

```

```

    demanda(i,t) = Nt(i);
end
end

if t == 1
    retorno(t) = ((P(t) + dividendo(t))/P_inicial) - 1;
else
    retorno(t) = ((P(t) + dividendo(t))/P(t-1)) - 1;
end

for i = 1:I_
    soma = 0;
    mi = (1 - mi_zero)/I;
    if t == 1
        if i <= 50
            soma =+ mi*abs(demanda(i+1,t) - Ntinicial);
        end
        if i == 51
            vol = 0.5*(mi_zero*abs(demanda(1,t)- Ntinicial) + soma);
            volume(t) = vol;
        end
    end
end

if t >= 2
    if i <= 50
        soma =+ mi*abs(demanda(i+1,t) - demanda(i+1,t-1));
    end
    if i == 51
        vol = 0.5*(mi_zero*abs(demanda(1,t) - demanda(1,t-1)) + soma);
        volume(t) = vol;
    end
end
end
end

```

```
tempo(t) = t;
t = t + 1;
D0 = Dt;
end
end

disp('A media do retorno foi: ')
disp(mean(retorno))
disp('A media do preço foi: ')
disp(mean(P))

disp('O desvio padrao do retorno foi: ')
disp(std(retorno))
disp('O desvio padrao do preço foi: ')
disp(std(P))

disp('A moda do retorno foi: ')
disp(mode(retorno))
disp('A moda do preço foi: ')
disp(mode(P))

disp('A mediana do retorno foi: ')
disp(median(retorno))
disp('A mediana do preço foi: ')
disp(median(P))

disp('A kurtose dos retornos foi: ')
disp(kurtosis(retorno))

disp('A kurtose dos preços foi: ')
disp(kurtosis(P))

disp('A assimetria dos retornos foi: ')
disp(skewness(retorno))
```

```
disp('A assimetria dos preços foi: ')
disp(skewness(P))

save('var2.mat','tempo','dividendo','P','retorno')

figure(1)
plot(tempo,P)
hold on
plot(tempo,Pt_F,'r--')
xlabel('Tempo')
ylabel('Preço')
legend('PE','Fund');

figure(2)
plot(tempo,demanda(1:),'r--')
hold on
plot(tempo,(demanda(2:51,:)))
xlabel('Tempo')
ylabel('Demandas')
legend('Fund','Exts');

figure(3)
plot(tempo,demanda(1:),'r--')
hold on
plot(tempo,demanda(2,:))
xlabel('Tempo')
ylabel('Demanda')
legend('Fund','Ext (Tipo 1)');

figure(4)
plot(tempo,retorno)
xlabel('Tempo')
ylabel('Retorno')
```

```
figure(5)
plot(tempo,volume)
xlabel('Tempo')
ylabel('Volume')
```

### **Código do modelo com aversão à perda nos grafistas.**

```
clear all
clc

% Model of bubbles %

% Parameters %
wi = 0.1; % Peso médio que o extrapolador i coloca sinal de valor %
teta = 0.9; % Determina a magnitude do sinal de crescimento de  $X_t$ , valor aproximado e
tirado de Barberis et. al. (2015)
gama = 0.1;
D0 = 100; % Dividendo inicial
delta_epsilon = 3; % Desvio padrão dos choques de fluxo de caixa
Q = 1; % Oferta per capita do ativo
T = 50; % Numero de periodos, como o intervalo de datas é um trimestre, a vida util do
ativo é 12.5 anos
X1 = 1;
I_ = 51;
I = 50; % Tipos de extrapolators
mi_zero = 0.3; % Fração de fundamentalistas na economia (30% fundamentalistas e 70%
extrapoladores)
w_zero = 1; %%%para os fundamentalistas, w=1 - vide equação 7 do paper.
wit = zeros(50);
tempo = zeros();
retorno = zeros();
```

```

dividendo = zeros();
Pt_F = zeros();
P = zeros();
demanda = zeros(50);
volume = zeros();
Nt = zeros();
acmXt = 0;
X = zeros();
P_inicial = 60;
Ntinicial = 10^(-10);
t = 1;
mi_i = zeros();
acmDi = zeros(50);
acmPi = zeros(50);
mud_real = zeros();
P_ajustado = zeros();
alpha = 2.25;

% Asset structure

while t <= T
    pd = random(makedist('Normal',0,3)); % ei iid ~ N(0,delta_epslon^2)
    Dt = D0 + pd;
    PtF = Dt - gama*delta_epslon^2*(T-t)*Q;
    Pt_F(t) = PtF;
    dividendo(t) = Dt;

    if t == 1
        X(t) = X1;
        acmXt =+ X(t);
    end

    if t == 2

```

```

X(t) = (1-teta)*(P(t-1) - P_inicial) + teta*X(t-1);
acmXt =+ X(t);
end

if t > 2
    X(t) = (1-teta)*(P(t-1) - P(t-2)) + teta*X(t-1);
    acmXt =+ X(t);
end

for i = 1:I_
    pd2 = random(makedist('Normal',0,0.3));
    ui_t = pd2;
    while ui_t < -0.09 && ui_t >= 0.09
        pd2 = random(makedist('Normal',0,0.3));
        ui_t = pd2;
    end

    if t == 1
        Nt(i) = 10^(-10);
    end

    if i == 1 && Nt(i) >= 0
        wit(i,t) = w_zero;
        mi = mi_zero;
        acmDi(i,t) = mi*(1-wit(i,t));
        acmPi(i,t) = mi*wit(i,t);
    end

    if i > 1 && Nt(i) >= 0
        wit(i,t) = wi + ui_t;
        mi = (1 - mi_zero)/I;
        acmDi(i,t) = acmDi(i-1,t) + mi*(1-wit(i,t));
        acmPi(i,t) = acmPi(i-1,t) + mi*wit(i,t);
    end
end

```

```

mi_i(i) = mi;
end

if t == 1
    P(t) = Dt + (acmDi(51,t)/acmPi(51,t))*X(t) -
(gama*delta_epislon^2*Q*acmPi(51,t)*(T-t-1)+1)/acmPi(51,t);
    P_ajustado(t) = P(t);
else if X(t-1) > mud_real(t-1)
    Pt = Dt + (acmDi(51,t)/acmPi(51,t))*alpha*X(t) -
(gama*delta_epislon^2*Q*acmPi(51,t)*(T-t-1)+1)/acmPi(51,t);
    P_ajustado(t) = Pt;
    P(t) = Dt + (acmDi(51,t)/acmPi(51,t))*X(t) -
(gama*delta_epislon^2*Q*acmPi(51,t)*(T-t-1)+1)/acmPi(51,t);
else if t > 1
    P(t) = Dt + (acmDi(51,t)/acmPi(51,t))*X(t) -
(gama*delta_epislon^2*Q*acmPi(51,t)*(T-t-1)+1)/acmPi(51,t);
    P_ajustado(t) = P(t);
end
end
end

if t == 1
    mud_real(t) = P(t) - P_inicial;
else
    mud_real(t) = P(t) - P(t-1);
end

if P(t) >= 0

for i = 1:I_
    if i == 1

```

```

    Nt_F      =      max(((Dt-gama*delta_epislon^2*(T-t-1)*Q
P(t))/(gama*delta_epislon^2)),0);
    Nt(i) = Nt_F;
    demanda(i,t) = Nt(i);
end
if i > 1
    Nt_E      =      max(wit(i,t)*((Dt-gama*delta_epislon^2*(T-t-1)*Q
P(t))/(gama*delta_epislon^2))+(1-wit(i,t))*(X(t)/(gama*delta_epislon^2)),0);
    Nt(i) = Nt_E;
    demanda(i,t) = Nt(i);
end
end

if t == 1
    retorno(t) = ((P(t) + dividendo(t))/P_inicial) - 2;
else
    retorno(t) = ((P(t) + dividendo(t))/P(t-1)) - 2;
end

for i = 1:I_
    soma = 0;
    mi = (1 - mi_zero)/I;
    if t == 1
        if i <= 50
            soma =+ mi*abs(demanda(i+1,t) - Ntinicial);
        end
        if i == 51
            vol = 0.5*(mi_zero*abs(demanda(1,t)- Ntinicial) + soma);
            volume(t) = vol;
        end
    end
end

if t >= 2
    if i <= 50

```

```
soma =+ mi*abs(demanda(i+1,t) - demanda(i+1,t-1));  
end  
if i == 51  
    vol = 0.5*(mi_zero*abs(demanda(1,t) - demanda(1,t-1)) + soma);  
    volume(t) = vol;  
end  
end  
end
```

```
tempo(t) = t;  
t = t + 1;  
D0 = Dt;  
end  
end
```

```
disp('A media do retorno foi: ')  
disp(mean(retorno))  
disp('A media do preço foi: ')  
disp(mean(P))
```

```
disp('O desvio padrao do retorno foi: ')  
disp(std(retorno))  
disp('O desvio padrao do preço foi: ')  
disp(std(P))
```

```
disp('A moda do retorno foi: ')  
disp(mode(retorno))  
disp('A moda do preço foi: ')  
disp(mode(P))
```

```
disp('A mediana do retorno foi: ')
```

```
disp(median(retorno))
```

```
disp('A mediana do preço foi: ')
```

```
disp(median(P))
```

```
disp('A kurtose dos retornos foi: ')
```

```
disp(kurtosis(retorno))
```

```
disp('A kurtose dos preços foi: ')
```

```
disp(kurtosis(P))
```

```
disp('A assimetria dos retornos foi: ')
```

```
disp(skewness(retorno))
```

```
disp('A assimetria dos preços foi: ')
```

```
disp(skewness(P))
```

```
save('var2.mat','tempo','dividendo','P','retorno')
```

```
figure(1)
```

```
plot(tempo,P)
```

```
hold on
```

```
plot(tempo,Pt_F,'r--')
```

```
hold on
```

```
plot(tempo,P_ajustado,'g')
```

```
xlabel('Tempo')
```

```
ylabel('Preço')
```

```
legend('PE','Fund','c/ Aversão à perda');
```

```
figure(2)
```

```
plot(tempo,demanda(1,:),'r--')  
hold on  
plot(tempo,(demanda(2:51,:)))  
xlabel('Tempo')  
ylabel('Demandas')  
legend('Fund','Exts');
```

```
figure(3)  
plot(tempo,demanda(1,:),'r--')  
hold on  
plot(tempo,demanda(2,:))  
xlabel('Tempo')  
ylabel('Demanda')  
legend('Fund','Ext (Tipo 1)');
```

```
figure(4)  
plot(tempo,retorno)  
xlabel('Tempo')  
ylabel('Retorno')
```

```
figure(5)  
plot(tempo,volume)  
xlabel('Tempo')  
ylabel('Volume')
```

```
figure(6)  
plot(tempo,X)  
hold on  
plot(tempo,mud_real,'r--')  
xlabel('Tempo')  
ylabel('Mudanças')  
legend('Esperada','Real')
```

